Keressük meg a B_2 ponton át azt az S síkot, amely párhuzamos az állításbeli síkkal. Ekkor S tartalmazza a B_2B_1 egyenest. S csak úgy lehet párhuzamos C_1C_2-vel is – ez az egyenes a tetraéder $ADB = S_c$ lapsíkjában van – , ha S_c-t a C_1C_2-vel párhuzamos egyenesben metszi.

Húzzuk meg tehát B_2-n át (S_c-ben) a C_1C_2-vel párhuzamos egyenest és jelöljük DB-vel való metszéspontját E-vel, ekkor a keresett sík 3 pontja B_1, B_2 és E. És mivel az állításban szereplő harmadik egyenes, A_1A_2, a tetraéder $BDC = S_a$ lapsíkjában van, azt kell csak belátnunk, hogy A_1A_2 és S-nek S_a-val való EB_1 metszésvonala párhuzamosak.

Jelöljük a DA, DB, DC élek hosszát rendre a, b, c-vel és legyenek a D-nél az élek között levő szögek rendre $BDC\sphericalangle = \alpha$, $CDA\sphericalangle = \beta$, $ADB\sphericalangle = \gamma$. Ekkor szerkesztésünk folytán

$$DE = \frac{DC_2}{DC_1} \cdot DB_2 = \frac{\cos\ \alpha}{\cos\ \beta} b\ \cos\ \gamma,$$

$$DB_1 = b\ \cos\ \alpha, \quad \text{tehát}$$

$$DE : DB_1 = \cos\ \gamma : \cos\ \beta = a\ \cos\ \gamma : a\ \cos\ \beta = DA_1 : DA_2,$$

és e sor két végén álló aránypárok egyenlősége éppen azt jelenti, amit bizonyítani akartunk.

1985-04-159-1.eps

1. ábra

Első ábránkon – szokásosan – a könnyebben elképzelhető esetre mutattunk példát, vagyis ha α, β, γ mindegyike hegyesszög. Ha tompaszög is van köztük, akkor modell készítése és a D-ben összefutó 3 lapnak mint palástnak síkba való kiterítése kevésbé könnyíti az elképzelést, mert egyes vetületek, esetleg mind a 6, az illető oldalél D-n túli meghosszabbítására esnek. Második ábránkon α-t és γ-t tompaszögnek gondoltuk és a testet majdnem fölülnézetből szemléltük, az alakzat hozzánk legközelebbi pontjai B_1, B_2, C_2 és A_1, ezek után hátrább következnek D, C_1 A_2 és E. (Az ABC háromszög oldalait el is hagytuk, nincs szerepük.)

1985-04-159-2.eps

2. ábra

Elveszti érdekességét, sőt a tartalmát is az állítás, ha az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek közül kettőnek közös az iránya, vagy ha valamelyik határozatlanná válik. Számításunk sem érvényes, ha csak egyik is 90° az α, β, γ közül. Például $\alpha = 90^\circ$ (és $\beta \neq 90^\circ$, $\gamma \neq 90^\circ$) esetén B_1 és C_2 egybeesik D-vel, tehát a B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek egybeesnek DA-val (3. ábra, a DA él mentén felvágott palást kiterítése). Ha pedig $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$, akkor C_1 és C_2 egybeesik, összekötő egyenesük határozatlan. Ilyen esetben a DA és DB élt alkotó lapok derékszöget zárnak be. Ezeket az eseteket eleve kizárta a feladat szövege.

1985-04-159-3.eps

3. ábra

Megjegyzés. Elhangzott olyan vélemény, hogy az OKTV I. fordulójának egyik feladata [1] azonos a fenti feladattal. Az az igazság, hogy a forrás közös. Az valóban nem lényeges különbség, hogy ott olyan *egyenes* létezését kellett bizonyítani, amely bizonyos 3 egyenes mindegyikére *merőleges*, itt viszont egy síkét, amely 3 egyenes mindegyikével *párhuzamos*. De más-más egyenesek szerepelnek a folytatásban! A versenyfeladatban az *egyes lapsíkokban önállóan* keletkeznek a vetületeket összekötő a_1b_1, b_2c_2 és c_3a_3 egyenesek (jobb megkülönböztetés végett, a szokásostól eltérően *kisbetűkkel* idéztük, a 4. ábrán is így szerepelnek), míg a mi feladatunkban pl. A_1A_2 *előkészítése*, a vetítés, az ADB, ill. ADC lapsíkban történik, maga az egyenes pedig az A-val szemben levő BDC lapsíkban van.

1985-04-160-1.eps

4. ábra

Természetes tehát, hogy a feladatunkban szereplő sík *nem azonos* (és nem is párhuzamos) a versenyfeladatban szereplő merőleges síkkal. A 4. ábra egy tetraéderpalást kiterítésén szemlélteti a vizsgált 3–3 egyenes különbözőségét. (Egymás után csatlakoznak az A_1A_2, a_3c_3, C_1C_2, c_2b_2, B_1B_2, b_1a_1 szakaszok, és a két végpont azonos.)

---

[1] „Az $SABC$ tetraéderen az ASB, BSC és CSA háromszögek egyike sem derékszögű. Az ASB lap S csúcshoz nem tartozó magasságainak talppontja A_1 és B_1, hasonlóképpen a BSC lap S csúcshoz nem tartozó magasságainak talppontja B_2 és C_2, végül a CSA lap S csúcshoz nem tartozó magasságainak talppontja C_3 és A_3. Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyenes, amely merőleges az A_1B_1, B_2C_2 és C_3A_3 egyenesek mindegyikére!”