I. megoldás. Válasszuk a koordináta-rendszer x és y tengelyének a BD, ill. AC átló egyenesét és jelöljük az első hat pont koordinátáit az alábbiak szerint:

$$A(0,\ a),\ B(b,\ 0),\ C(0,\ c),\ D(d,\ 0),\ U(0,\ u),\ V(v,\ 0).$$

1985-05-199-1.eps

A P pont $(x_P,\ y_P)$ koordinátáit az $AP : BP = \lambda \neq 0$ (előjeles) aránnyal fejezzük ki a-ból és b-ből. Ezen az úton csak a $P = A$, valamint $P = B$ eset nem jellemezhető, erre viszont az állítás úgyis semmitmondó.

Azt is tüstént kimondjuk, hogy pontjaink $b,\ d,\ v$ abszcisszái, valamint az $a,\ c,\ u$ ordináták is páronként különböznek egymástól és 0-tól.

Amíg P az A-tól B-ig halad, $\lambda = AP : BP$ növekedve minden pozitív értéket fölvesz, a B-n túli meghosszabbításon $PB < 0$ és $AP > |PB|$, ezért minden $\lambda < -1$ értéken átfut, AB-nek A-n túli meghosszabbításán pedig $AP < 0$ és $|AP| < PB$, végül is minden $-1 < \lambda < 0$ érték kiadódik. $\lambda = -1$ az AB egyenes végtelen távoli (ideális) pontját adná P számára. Könnyű belátni, hogy az állítás olyankor is igaz.

A λ arány PA-nak és PB-nek a tengelyeken levő vetületeiben is megmarad:

$$x_P : (b - x_P) = \lambda$$

és

$$(y_P - a) : (-y_P) = \lambda,$$

innen

$$x_P = \frac{\lambda}{1+\lambda} b, \qquad y_P = \frac{1}{1+\lambda} a.$$

Mármost a PU egyenes iránytangense, majd egyenlete abból, hogy átmegy U-n:

$$\frac{\frac{1}{1+\lambda} a - u}{\frac{\lambda}{1+\lambda} b} = \frac{a - (1+\lambda)u}{\lambda b}, \qquad y - u = \frac{a - (1+\lambda)u}{\lambda b} \cdot x.$$

Hasonlóan a BC egyenes egyenlete $y - c = -\frac{c}{b} x$, és ezekből Q koordinátái:

$$x_Q = \frac{\lambda b(u-c)}{(u-a) + \lambda(u-c)}, \qquad y_Q = \frac{c(u-a)}{(u-a) + \lambda(u-c)}.$$

Hasonlóan a PV, illetve AD egyenes egyenlete, majd S koordinátái:

$$y = \frac{-a}{v + \lambda(v-b)}(x - v),$$
$$y = -\frac{a}{d}(x - d),$$

$$x_S = \frac{\lambda d(v-b)}{(v-d) + \lambda(v-b)}, \qquad y_S = \frac{a(v-d)}{(v-d) + \lambda(v-b)}.$$

Mielőtt továbbmennénk, rámutatunk az alakzatban mutatkozó szerepek szimmetriájára. Az OP „tengelyhez” képest szimmetrikus szerepeket játszanak a következő pontpárok:

$$A \text{ és } B, \quad C \text{ és } D, \quad U \text{ és } V, \quad Q \text{ és } S,$$

továbbá az x és y koordinátatengelyek, ezeknek megfelelően a koordináták párjai is, végül ezzel a „szereptükrözéssel”

$$\lambda = \frac{AP}{PB} \quad \text{helyére} \quad \frac{BP}{PA} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{jut.}$$

Valóban, x_Q ilyen értelemben vett „párja”

$$\frac{\frac{1}{\lambda} a\,(v-d)}{(v-b) + \frac{1}{\lambda}(v-d)} = \frac{a(v-d)}{(v-d) + \lambda(v-b)} = y_S,$$

és ugyanígy y_Q és x_S kifejezései is egymásba mennek át.

Hozzátesszük: ebben a szimmetriában a CD egyenes megfelelője DC, vagyis önmaga. Ekkor a feladat állítását így is kimondhatjuk: a QV és CD egyenesek metszéspontja azonos az SU és DC egyenesek metszéspontjával. Ehhez most már elég lesz kiszámítani QV és CD metszéspontját, majd megnézni, hogy véve az előzők szerinti párját, azaz SU és DC metszéspontját, a két pont azonos-e egymással.

Jelöljük CD-nek QV-n és SU-n levő pontját R-rel, ill. R^*-gal.

QV iránytangense céljára abszcisszáik különbsége így alakítható:

$$x_Q - v = \frac{\lambda b(u-c) - v(u-a) - \lambda v(u-c)}{(u-a)+\lambda(u-c)} = -\frac{v(u-a)+\lambda(v-b)(u-c)}{(u-a)+\lambda(u-c)},$$

tehát QV egyenlete:

$$y = \frac{y_Q}{x_Q - v}(x-v) = -\frac{c(u-a)}{v(u-a)+\lambda(v-b)(u-c)}(x-v).$$

A CD egyenes egyenlete:

$$y = -\frac{c}{d}(x-d),$$

tehát

$$x_R = \frac{\lambda d(u-c)(v-b)}{(u-a)(v-d)+\lambda(u-c)(v-b)},$$
$$y_R = \frac{c(u-a)(v-d)}{(u-a)(v-d)+\lambda(u-c)(v-b)}.$$

Kiszámítjuk x_R-ből y_{R^*}-ot a fentebb mondott „tükrözéssel":

$$\frac{\frac{1}{\lambda}c\,(v-d)(u-a)}{(v-b)(u-c)+\frac{1}{\lambda}(v-d)(u-a)},$$

ez pedig azonos y_R kifejezésével. Ezzel az állítást bebizonyítottnak tekintjük.

II. megoldás. Segédtételül felhasználjuk *Menelaosz-tételét:* ha az EFG háromszög FG, GE és EF oldalegyenesein levő E_1, ill. F_1, ill. G_1 pontokra fennáll a következő egyenlőség:

$$FE_1 \cdot GF_1 \cdot EG_1 = -E_1G \cdot F_1E \cdot G_1F,$$

akkor az E_1, F_1, G_1 pontok egy egyenesen vannak. A tétel megfordítása is igaz.

A szakaszok előjellel együtt értendők, pozitívnak véve pl. az E, F, G körüljárás irányát. [1] A segédtételt alkalmazva az I. megoldás jelöléseivel a BCA háromszögre és az egy egyenesen sorakozó U, P, Q pontokra:

$$\frac{BQ}{QC} = -\frac{UA \cdot PB}{CU \cdot AP}; \tag{1.1}$$

a BCD háromszögre és az R, V, Q pontokra, majd beírva (1.1) eredményét:

$$\frac{DR}{RC} = -\frac{DV}{VB} \cdot \frac{BQ}{QC} = +\frac{UA}{CU} \cdot \frac{PB}{AP} \cdot \frac{DV}{VB}; \tag{1.2}$$

továbbá az ADB háromszögre és a V, P, S pontokra (vagyis az (1.1) eset háromszöge és egyenese helyére a „tükörképeket" véve):

$$\frac{AS}{SD} = -\frac{VB \cdot PA}{DV \cdot BP}; \tag{2.1}$$

[1] Mi a megfordítást igazoljuk a párhuzamos szelők tételeinek kétszeri alkalmazásával: ha egy e egyenes az oldalegyeneseket az 1-es indexű pontokban metszi, akkor fennáll $3-3$ szakaszból képezett szorzatok közti egyenlőség, a jobb oldalt ellentett jellel véve.

Húzzuk meg G-n át az e-vel párhuzamos egyenest és jelöljük EF-fel való metszéspontját H-val.

1985-05-201-1.eps

Ekkor

$$\frac{HG_1}{G_1F} = \frac{GE_1}{E_1F} \qquad \text{és} \qquad \frac{EG_1}{G_1H} = \frac{EF_1}{F_1G},$$

amiből, egyes szakaszokat (-1)-gyel szorozva és egyben irányukat megfordítva

$$-FE_1 \cdot HG_1 = -E_1G \cdot G_1F,$$
$$-GF_1 \cdot EG_1 = +HG_1 \cdot F_1E,$$

végül szorzással, egyszerűsítéssel az állítást kapjuk. – Akkor is érvényes az egyenlőség, ha e átmegy valamelyik csúcson.

végül ugyanígy az ADC háromszögre és az $R^*,\ U,\ S$ pontokra:

$$\frac{CR^*}{R^*D}=-\frac{CU}{UA}\cdot\frac{AS}{SD}=+\frac{VB}{DV}\cdot\frac{PA}{BP}\cdot\frac{CU}{UA}. \tag{2.2}$$

Az utóbbi két sor *eredménye* is kiadódik tükrözéssel az előbbi két sor eredményeiből.

Ezek szerint, kellő átrendezést végezve

$$\frac{DR^*}{R^*C}=\frac{DR}{RC},$$

tehát R^* azonos R-rel; ezzel a bizonyítást befejeztük.

Itt *nem használtuk ki*, hogy AC és BD merőlegesek egymásra, ennélfogva ez a rész a feladat föltevéseiből elhagyható.

III. megoldás. Itt sem használjuk ki AC és BD merőleges voltát. Ha a $P=A$, $Q=B$, $U=C$ és $V=D$ egyenlőségek közül egy vagy több teljesül, akkor vagy nincs értelme a keresett metszéspontnak, vagy az triviálisan C, illetve D. Ha $U=V$, akkor a két egyenes egybeesik. Elég tehát azt az esetet vizsgálni, amikor ezek nem állnak fenn.

Segítségül veszünk olyan $A_1,\ B_1,\ C_1$ és D_1 nem egy síkba eső pontokat, amelyeknek merőleges vetülete a feladat síkjára sorra $A,\ B,\ C$ és D. Legyen P_1 az A_1B_1; U_1 az A_1C_1; és V_1 a B_1D_1 egyenes azon pontja, amelynek vetülete P, U, illetve V. P_1B_1 és U_1C_1 egyenesek A_1-ben metszik egymást, tehát egy síkban van ez a négy pont, és így P_1U_1 és B_1C_1 egyenes is egy síkban van. Nem párhuzamosak, mert vetületeik Q-ban metszik egymást. Ezért van egy Q_1 metszéspontjuk, és ennek vetülete Q. – Hasonlóan látható, hogy $D_1V_1,\ A_1P_1$ egy síkban van, azaz A_1D_1 és P_1V_1 metszi egymást S_1-ben, amelynek S a vetülete.

1985-05-202-1.eps

Elég lenne belátni, hogy az $S_1U_1,\ Q_1V_1$ és D_1C_1 egyenesek egy ponton mennek át, mert akkor ez igaz a vetületeikre is. Először is belátom, hogy páronként egy síkban vannak, de nincs mind egy síkban. Valóban, C_1U_1 és D_1C_1 benne van A_1D_1 és A_1C_1 síkjában, S_1U_1 és Q_1V_1 benne van P_1U_1 és P_1V_1 síkjában, Q_1V_1 és D_1C_1 pedig benne van D_1B_1 és C_1B_1 síkjában (három pont mindig egy síkban van). De ha mind egy síkban lennének, akkor ebben lenne a Q_1C_1 egyenes B_1 pontja és az S_1D_1 egyenes A_1 pontja is, csakhogy $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1$ nem voltak egy síkban. Elég tehát belátni, hogy 3 egyenes, $e,\ f,\ g$ közül; ha bármely kettő egy síkban van, akkor egysíkúak, párhuzamosak, vagy egy ponton mennek át. Ekkor ugyanis a vetületek, $CD,\ SU,\ QV$ vagy mind párhuzamosak, vagy létezik a metszéspont, és rajta van CD-n.

Legyen $e,\ f,\ g$ három ilyen egyenes ! Ekkor bármely kettő vagy metszi egymást, vagy párhuzamos. Három eset van: a) mind párhuzamos, b) kettő párhuzamos, a harmadik metszi őket, de ekkor benne van a síkjukban, c) páronként metszik egymást. Így vagy egy háromszög oldalegyenesei, tehát egysíkúak, vagy a három metszéspont egybeesik, és ezen a ponton megy át mindhárom egyenes. – Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzés: A feladat lényegében ekvivalens *Desargues tételével:* ha két háromszög olyan helyzetű (a síkban vagy a térben), hogy egy-egy megfelelő szögpontjukat összekötő egyenesek egy ponton mennek át (vagy ha a 3 egyenes párhuzamos egymással), akkor a megfelelő oldalegyenesek metszéspontjai egy egyenesen vannak. A tétel megfordítása is igaz, nálunk: a CQU és DVS háromszögek megfelelő oldalegyenespárjainak metszéspontjai $B,\ P,\ A$, ezért a megfelelő csúcspárok összekötő egyenesei R-ben metszik egymást.