$x(1-\lg 2,5)=x(\lg 10-\lg 2,5)=x\lg 4=\lg 4^x$ minden x-re. Egyenletünk tehát ekvivalens az

$$\lg(2^x+x-1)=\lg 4^x \tag{1}$$

egyenlettel. Ha $x\leqq 0$, akkor $2^x-1\leqq 0$, tehát a bal oldalon egy nem pozitív szám logaritmusa áll, ami értelmetlen. Elég tehát $x>0$ esetén vizsgálni a fenti egyenletet. (Ekkor $2^x-1>0$, $x>0$, tehát a bal oldal is értelmes.) A logaritmus függvény szigorúan monoton, tehát (1) ekvivalens a

$$2^x+x-1=4^x,\quad x>0$$

egyenlettel. Átalakítva: $x-1=2^x(2^x-1)$. Itt $x>0$ miatt a jobb oldal pozitív, tehát a bal oldal is, vagyis $x>1$. Be fogjuk bizonyítani, hogy $2^x>x$ minden valós x-re. Ebből $x>1$ esetén

$$2^x(2^x-1)>2^x(x-1)>2(x-1)>x-1$$

következik, vagyis egyenletünknek nincs megoldása.

Hátra van még

$$2^x>x \tag{2}$$

bizonyítása. Ha x negatív, akkor a jobb oldal negatív, a bal oldal pozitív, tehát (2) igaz. Teljes indukcióval belátjuk, hogy ha x az $[n,\ n+1)$ intervallumban van, akkor is igaz (2). Ebből (2) már minden x-re következik. Legyen elsőként $n=0$, x pedig legyen a $[0,\ 1)$ intervallumban. Ekkor $2^x>2^0=1>x$, tehát (2) igaz. Tegyük fel, hogy $m\geqq 1$ egész, és hogy ha x az $[m-1,\ m)$ intervallumba esik, akkor (2) igaz. Essen x_0 az $[m,\ m+1)$ intervallumba ! Legyen $x_0-1=x$, ez az $[m-1,\ m)$ intervallumba esik, és ezért az indukciós feltevés miatt $2^x>x$. Továbbá $x\geqq 0$ miatt

$$2^{x_0}=2^{x+1}=2\cdot 2^x=2^x+2^x\geqq 2^x+1>x+1=x_0,$$

amit állítottunk. Ezzel (2)-t bizonyítottuk, tehát az egyenletnek valóban nincs gyöke.