I. megoldás. Jelöljük a tetraéder körülírt gömbjét G-vel, sugarát R-rel, az ABC alapháromszög körülírt körét k-val, ennek középpontját K-val és sugarát r-rel, az AB alapélt a-val, az AOD szöget φ-vel. A k kör egyrészt G, másrészt az oldalélek egyenlősége folytán a D körüli DA sugarú gömb metszésvonala, ezért K rajta van a DO tengelyen és $r=R\ \sin\ \varphi$. Így a k-ba beírt szabályos háromszög oldalaként $a=\sqrt{3}r=\sqrt{3}R\ \sin\varphi$ adódik.

1985-04-157-1.eps

Az OAB háromszögből a cosinustétel alapján

$$\cos\ AOB\sphericalangle=\frac{2R^2-AB^2}{2R^2}=1-\frac{3}{2}\sin^2\ \varphi=\frac{3}{2}\varphi-\frac{1}{2},$$

tehát az állítás bal oldala így írható:

$$\frac{3}{2}\cos^2\ \varphi+\cos\ \varphi-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left(\cos\ \varphi+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{2}{3},$$

innen pedig az állítás helyessége nyilvánvaló. Egyenlőség $\cos\ \varphi=-1/3$ esetén teljesül, akkor O az $1/4$ részében vágja ketté a DK súlyvonalat, O a súlypont, tehát a tetraéder szabályos.

Megjegyzés. A megoldások legtöbbje az OK paraméter függvényében vizsgálta a bal oldal változását. Ezáltal a vizsgálat bonyolultabb lett, mint a fentiekben, ahol a második tagon mit sem kellett változtatni. Számos dolgozat hiányos is lett azáltal, hogy K helyzetét O-nak csak az egyik oldalán vizsgálta.

II. megoldás. Az állításban az O-ból a csúcsokba húzott sugarak közti szögekről van szó. Mind a 4 csúcsot és a nyilvánvaló szimmetriát figyelembe véve mindkétféle szög 3-szor fordul elő. Ezen az észrevételen alapul a következő bizonyítás:

$$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)^2\geq 0.$$

Kifejtve

$$4R^2+6R^2\cos AOB\sphericalangle+6R^2\ \cos\ AOD\sphericalangle\geq 0.$$

Innen egyszerű átrendezéssel adódik az állítás.