Jelöljük A-val, B-vel az asztal kerületének azokat a pontjait, amelyekben a golyó egymás után visszaverődik, továbbá O-val a kör (az asztal) középpontját. A és B sorrendje fölcserélhető, hiszen a P, A, B, P sorrend esetében a rugalmas visszaverődés törvénye szerint az AB egyenes az AP-nek a tükörképe a kör AO szimmetriatengelyére, majd BP a BA képe BO-ra, ennélfogva az útvonal ugyanaz lesz, ha a golyót P-ből B felé indítjuk. Az is nyilvánvaló, hogy a golyó útvonala szimmetrikus a PO tengelyre, tehát $AB \perp PO$.

1985-04-156-1.eps

1. ábra

Legyen AB felezőpontja F, továbbá $OP = p$, $OF = x$, a feladat szerint $OA = r = 1$ (méter) és $PAO\sphericalangle = OAB\sphericalangle = \alpha$, $OPA\sphericalangle = 90^\circ - 2\alpha$.

Az OPA háromszögben a sinustétel alapján

$$OA\ \sin\alpha = OP\ \sin OPA\sphericalangle, \qquad r\ \sin\alpha = p\ \cos\ 2\alpha = p(1-2\sin^2\alpha),$$
$$2\ p\ \sin^2\alpha + r\ \sin\alpha - p = 0, \qquad \sin\alpha = \frac{1}{4p}(-r \pm \sqrt{r^2+8p^2}) = \frac{OF}{r}.$$

Számadatainkkal az egyenlet pozitív gyöke $\sin\alpha = (\sqrt{57}-5)/8$. A másik gyök negatív, mert az ismeretlent nem tartalmazó tag ellentett jelű $\sin^2\alpha$ együtthatójával, számunkra nem jelent megoldást. A pozitív gyök mellett is csak az felel meg, ha α hegyesszög, így $\alpha = 18^\circ\ 35'\ 10''$ és $OF = 31{,}87$ cm.

A golyó további útján jelöljük a visszaverődési pontokat A_3, A_4, $\ldots$, A_{10}, A_{11}-gyel, hozzájuk véve legyen $A_1 = A$ és $A_2 = B$. Helyzetüket az OP alapiránytól mért forgásszöggel jellemezzük. OA_1-re $\varphi_1 = 90^\circ + \alpha$, minden további sugár esetére φ növekedése $A_iOA_{i+1}\sphericalangle = AOB\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$, tehát

$$\varphi_i = (2i-1)\cdot 90^\circ - (2i-3)\ \alpha.$$

Eszerint 360° megfelelő többszörösét levonva

$$\varphi_{10} = -45^\circ\ 57'\ 49'' \qquad \varphi_{11} = 96^\circ\ 51'\ 50''.$$

(OA_{11} mintegy 12°-kal van visszafelé elfordulva OA_1-től (2. ábra), OA_6 pedig 6°-kal; a golyó nagyjából egy szabályos csillagötszög kerületét írja le.)

1985-04-156-2.eps

2. ábra

Jelöljük OP és $A_{10}A_{11}$ metszéspontját M-mel és P vetületét az $A_{10}A_{11}$ útszakaszra P'-vel. Ekkor $PP' = PM\ \cos\gamma$, ahol $\gamma = (\varphi_{10}+\varphi_{11})/2 = 25^\circ\ 27'$ és $PM = OP - OM$, a levonandót az MOA_{11} háromszögből számolhatjuk:

$$OM = OA_{11}\cdot\frac{\sin 18^\circ\ 35'\ 10''}{\sin(90^\circ-\gamma)} = 0{,}353,$$

hiszen $MA_{11}O\sphericalangle = \alpha$. Ennélfogva

$PP' = (0{,}4 - 0{,}353)\ \cos\ \gamma = 0{,}0425$ m, vagyis $PP' = 4{,}25$ cm.

Megjegyzések. **1.** Többen azt a triviális, semmitmondó megállapítást is megoldásnak tekintették, hogy a golyót a P-n átmenő körátmérő mentén kell meglökni. Így már az első visszaverődés után is áthalad P-n, minden további menetben is, és a kérdezett távolság akárhányadik menetben O. *Nem vitatkozunk ezzel a felfogással.*

2. Többen abból indultak ki, hogy az útvonalnak szabályos csillagötszögnek „kell” lennie, tehát az $OP = 0{,}4$ m adat „hibás”. Az igaz, hogy az adat a $\cos 72^\circ/\cos 36^\circ = (3-\sqrt{5})/2 = 0{,}382\ldots$ szám kerekítéséből származik – ennyire van a középponttól a szabályos csillagötszög két oldalának „belső” metszéspontja. A kerekítéssel tudatosan „kicsit elrontottuk” a szabályosságot. A világ nemcsak szabályos dolgokból áll, sőt a legtöbb dolog távol áll mindennemű idealizált szabályosságtól.