Legyen az adott pont P, és a háromszög szokásos jelölései mellett x, y, z rendre a $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ oldaltól mért távolság. A bizonyítandóval ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk négyzetre emelés útján. Ebben a bal oldal tagjait kéttényezős szorzatokká alakítjuk:

$$\sqrt{x} = \sqrt{ax} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{s í. t.},$$

ekkor alkalmazhatjuk rá ($n = 3$ megválasztással) az ún. Cauchy–Bunjakovszkij-féle egyenlőtlenséget:[1]

$$\left(\sqrt{ax} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{by} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{cz} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \leq (ax + by + cz)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \tag{2}$$

Ha (2) jobb oldalát írjuk (1) négyzetének bal oldala helyére, új kérdésünk ez lesz: igaz-e még a következő is:

$$(ax + by + cz)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{9r}{2}. \tag{3}$$

Az első zárójel az ABC háromszög területének a 2-szerese, független P megválasztásától – és ez még akkor is igaz, ha P valamelyik oldalszakasz belső pontja – , tehát ismert összefüggés alapján egyenlő $abc/2r$-rel. Ezt beírva és átszorozva, a következőt akarjuk bizonyítani:

$$abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = bc + ca + ab \leq 9r^2,$$

ez pedig az $a = 2r\ \sin\ \alpha$ s í. t. összefüggések alapján a következővel ekvivalens:

$$\sin\ \alpha\ \sin\ \beta + \sin\ \beta\ \sin\ \gamma + \sin\ \gamma\ \sin\ \alpha \leq \frac{9}{4}.$$

Alkalmazzuk e szorzatokra a következő azonosságot, amely az addíció tételekből következik:

$$2\ \sin\ u\ \sin\ v = \cos\ (u - v) - \cos\ (u + v) = \cos\ (u - v) + \cos\ (180^\circ - u - v),$$

$$\cos\ (\alpha - \beta) + \cos\ (\beta - \gamma) + \cos\ (\gamma - \alpha) + \cos\ \alpha + \cos\ \beta + \cos\ \gamma \leq 9/2. \tag{4}$$

Az első három tag mindegyike helyére 1-et írva a bal oldal nem csökken. Ha tehát igazoljuk, hogy

$$\cos\ \alpha + \cos\ \beta + \cos\ \gamma \leq \frac{3}{2}, \tag{5}$$

evvel (1)-et is igazoltuk. Már most (5) bal oldala ismert azonosságok alkalmazásával

$$\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + 2\cos\frac{\beta + \gamma}{2}\cos\frac{\beta - \gamma}{2} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(1 + 4\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}.$$

Az utolsó becslésben akkor áll egyenlőség, ha $\alpha = 60^\circ$, de ez β-ra és γ-ra is értendő, hiszen ekkor lesz $\cos\dfrac{\beta - \gamma}{2} = 1$. Különben is (5)-ben egyező szerepe volt a három szögnek. Ekkor $a = b = c$, és (4)-ben, (3)-ban is egyenlőség érvényes.

Mindezek szerint az (1) állítás helyes. Ha a háromszög szabályos és $\sqrt{ax} : \sqrt{a} = \sqrt{by} : \sqrt{b} = \sqrt{cz} : \sqrt{c}$, vagyis $x = y = z$, tehát P a háromszög középpontja, akkor (1) két oldala egyenlő. Más esetben nem állhat egyenlőség.

Megjegyzések. 1. A három x, y, z távolságról és a háromszögről tulajdonképpen csak azt használtuk fel, hogy $ax + by + cz = 2t$. Ez a derékszögű és a tompaszögű háromszögek belső P pontjaira is érvényes, az x, y, z távolságokat természetesen az oldalak egyeneseitől értve. Nem arról van tehát szó, hogy (1) csak hegyesszögű háromszögekre volna érvényes. Gondolva arra, hogy tompaszögű háromszög körülírt körének sugara sokszorosa is lehet még a legnagyobb oldalnak is, ezzel a nyomatékkal is mondhatnánk: 1) *még* hegyesszögű háromszögekben is érvényes, pedig ott „nehezebb”.

2. *Pfeil Tamás* (Dunaújváros, Münnich F. Gimn., IV. o. t.) megmutatta, hogy a $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ kifejezés arra a P^* pontra nézve maximális, ahol azok az AA^*, BB^*, CC^* Ceva-szakaszok futnak össze, amelyekre nézve A^* az AA_1 szögfelező A_1 végpontjának tükörképe a BC oldal felezőpontjára nézve és B^*, C^* az ugyanígy keletkező pontok. A bizonyításban felhasználta azt a cikket is, amely lapunk 1984. októberi számában jelent meg, akárcsak ez a feladat.

---

[1] Az egyenlőtlenség általában így szól

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\sum_{i-1}^{n} v_i^2\right) \qquad (n \geq 2).$$

Valóban, a jobb és a bal oldal különbsége $n = 3$ esetén így alakítható:

$$(u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 \geq 0,$$

innen látható, hogy egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan $\lambda(\neq 0)$ szám, hogy minden i-re $v_i = \lambda u_i$. (Lásd pl. Szakköri feladatgyűjtemény 435. feladat.)