

I. megoldás. Indirekt bizonyítunk, azaz feltesszük, hogy megadható a síkon végtelen sok pont, amelyek között fellépő távolságok között csak véges sok különböző van, és ebből ellentmondásra fogunk jutni. Legyenek a távolságok $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$. Legyen P és Q két pont a végtelen sok közül. A P körüli d_i sugarú kör legyen k_i , a Q körüli d_j sugarú kör pedig l_j . Feltételünk szerint minden pont rajta van a $k_1, k_2, \dots, k_n$ körök valamelyikén, és az $l_1, l_2, \dots, l_n$ körök valamelyikén is. A k_1 körnek az $l_1, l_2, \dots, l_n$ körökkel legfeljebb 2–2 metszéspontja van, tehát legfeljebb $2n$ pont lehet a megadottak közül a k_1 körön. Ugyanez igaz a $k_2, k_3, \dots, k_n$ körökre. Ez összesen legfeljebb $n \cdot 2n = 2n^2$ pont, P -n és Q -n kívül. $2n^2$ véges szám, ami ellentmond annak, hogy végtelen sok pont volt megadva.

A keresett ellentmondást megkaptuk, az állítást bizonyítottuk.

II. megoldás. Ismét indirekt bizonyítunk: feltesszük, hogy megadható végtelen sok pont, amelyek között csak véges sok távolság lép föl. Véges sok távolság között van legkisebb (mármint olyan, aminél kisebb távolság nem fordul elő), legyen ez m , és van legnagyobb, ami legyen M . Képzeljünk el a síkon egy olyan négyzetrácsot, amelyben egy négyzet átlója m . Ekkor egy négyzetbe a megadottak közül legfeljebb két pont eshet, hiszen egy négyzetben nincs az átlónál távolabbi pontpár. Legyen Q az egyik megadott pont. Rajzoljunk Q köré M sugarú kört! Ezen a körön kívül biztosan nincsen a megadott pontok közül egy sem, hiszen M a legnagyobb távolság. De ezt a kört a négyzetrács véges sok négyzete lefedi, és mindegyik négyzetben csak két megadott pont lehet. Ezért a körben is csak véges sok megadott pont lehet. Ez az ellentmondás bizonyítja feltevésünk helytelen voltát és a feladat állítását.