I. megoldás. Jelöljük b-vel az xyz szorzatot és a-val az $x+y+z$ összeget! Ha $b=0$, akkor x, y, z valamelyike, mondjuk x is nulla. A $4xyz=(x+y)(xy+2)$ egyenlet ekkor így alakul :

$$0=2y, \quad \text{vagyis} \quad y=0.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy $z=0$, ebben az esetben tehát az $x_1=y_1=z_1=0$ megoldást kapjuk. Hasonlóan erre a megoldásra vezet az $y=0$ és $z=0$ feltétel is, csak akkor a $4xyz=(y+z)(yz+2)$, illetve $4xyz=(z+x)(xz+2)$ egyenletet használjuk.

A továbbiakban feltesszük, hogy $b\neq 0$, vagyis x, y, z egyike sem nulla. Egyenletrendszerünket most így írhatjuk fel:

$$4b=(a-z)\left(\frac{b}{z}+2\right),$$
$$4b=(a-y)\left(\frac{b}{y}+2\right),$$
$$4b=(a-x)\left(\frac{b}{x}+2\right).$$

Vagyis ha a-t és b-t már ismerjük, akkor x, y és z a következő egyenlet megoldásai közül kerülhet csak ki :

(2) $$4b=(a-u)\left(\frac{b}{u}+2\right).$$

Ez az $u\neq 0$ esetén ekvivalens a

(3) $$2u^2+(5b-2a)u-ab=0$$

másodfokú egyenlettel, amelynek főegyütthatója nem nulla. Egy ilyen egyenletnek legföljebb két különböző megoldása lehet, x, y, z közül tehát legalább kettő egyenlő.

Ha $x=y=z$ (és persze nullától különböznek), akkor (1) a

$$4x^3=2x(x^2+2)$$

alakra egyszerűsödik. Most oszthatunk $2x$-szel, rendezés után $x^2-2=0$, amiből két további megoldást kapunk :

$$x_2=y_2=z_2=\sqrt{2},$$
$$x_3=y_3=z_3=-\sqrt{2}.$$

Marad még az az eset, amikor x, y, z közül kettő (pl. x és y) egyenlő és a harmadik különbözik tőlük. Ekkor x és z is kielégíti (3)-at, így a két gyök x és z. A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján $xz=-\dfrac{ab}{2}$. Tudjuk, hogy $b=xyz$, $a=x+y+z$ és $x=y$, tehát $b=x^2z$, $a=2x+z$. Ezt beírva

$$xz=-\frac{x^2z(2x+z)}{2}.$$

Feltettük, hogy x és z nem nulla, tehát oszthatunk xz-vel, rendezés után

(4) $$2x^2+xz+2=0.$$

Másrészt az egyenletrendszer első egyenletébe az $x=y$ összefüggést helyettesítve $4x^2z=2x(x^2+2)$. Megint oszthatunk $2x$-szel, a rendezés után

$$x^2-2xz+2=0.$$

Ehhez (4) kétszeresét adva $5x^2+6=0$ adódik, aminek nincs megoldása a valós számok között. Beláttuk tehát, hogy ebben az esetben nincs megoldás.

Egyenletrendszerünknek tehát csak az

$$x_1=y_1=z_1=0, \quad x_2=y_2=z_2=\sqrt{2}, \quad x_3=y_3=z_3=-\sqrt{2}$$

számhármas tehet eleget. Könnyen ellenőrizhető, hogy e három számhármas valóban megoldása is az egyenletrendszernek.

II. megoldás: Az $(x+y)(xy+2)=(y+z)(yz+2)$ egyenletből rendezés után az

(5) $$(x-z)(y^2+xy+yz+2)=0$$

egyenlethez jutunk. Hasonlóan kapjuk az

$$(x-y)(z^2+xz+yz+2)=0 \tag{6}$$

$$(y-z)(x^2+xy+xz+2)=0 \tag{7}$$

egyenleteket. Ha x, y, z mindegyike különböző volna, akkor az egyenletek bal oldalán a második zárójelben álló kifejezéseknek kellene nullának lenniük, de akkor ezek összege is nulla volna, holott ezek összege éppen $(x+y+z)^2+6$, ami biztosan pozitív. x, y, z közül tehát legalább kettő egyenlő. Ha például $x=y\neq z$, akkor (7) bal oldalán a második zárójelben áll nulla, tehát

$$0=x^2+xy+xz+2=2x^2+xz+2.$$

Másrészt a $4xyz=(x+y)(xy+2)$ egyenlet $x=y$ esetén $4x^2z=2x(x^2+2)$, azaz

$$2x(x^2+2-2xz)=0$$

lesz. Az I. megoldásban már láttuk, hogy $x=0$ esetén az

$$x_1=y_1=z_1=0$$

megoldáshoz jutunk. Ha $x\neq 0$, akkor a

$$2x^2+xz+2=0,$$
$$x^2-2xz+2=0$$

egyenletrendszerhez jutunk, aminek (mint láttuk) valós számok között nincs megoldása. Maradt tehát az az eset, ha $x=y=z\neq 0$, ekkor az

$$x_2=y_2=z_2=\sqrt{2} \quad \text{és az} \quad x_3=y_3=z_3=-\sqrt{2}$$

megoldásokat kapjuk. Egyenletrendszerünknek tehát három megoldása lehet, s ez a három számhármas meg is felel.