Tudjuk, hogy a háromszögben az A-ból induló szögfelező és a BC oldal felező merőlegese a háromszög köré írt körön metszi egymást. Jelöljük ezt a pontot P-vel. A $PBC\sphericalangle = PAC\sphericalangle = BAP\sphericalangle$ egyenlőségből és az $A_1PB\sphericalangle$ közös szögből látható, hogy az ABP és BA_1P háromszögek hasonlóak, a csúcspárok a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak (1. ábra).

1985-04-151-1.eps

1. ábra

Ebből

$$PA : PB = (PA_1 + AA_1) : PB = PB : PA_1,$$

és rövid átrendezéssel

$$\left(PA_1 + \frac{AA_1}{2}\right)^2 = BP^2 + \frac{AA_1^2}{4},$$

$$PA_1 = \sqrt{BP^2 + \frac{AA_1^2}{4}} - \frac{AA_1}{2}, \tag{1}$$

$$PA = \sqrt{BP^2 + \frac{AA_1^2}{4}} + \frac{AA_1}{2}. \tag{2}$$

A szerkesztés első lépéseként az adott r sugarú k körbe beillesztjük az adott BC oldalt mint húrt. (Ha $BC > 2r$, akkor természetesen eleve nincs megoldás.) Behúzva a BC szakasz felező merőlegesét, ez k-ból kimetszi a P szerepére szóba jövő P^* és P^{**} pontokat (legyen P^{**} a „felső" BC íven, vagyis amelyiken A-t elsősorban „várjuk"). $BC < 2r$ esetén P^*B és $P^{**}B$ különbözők, ezért a továbbiakban PB szerepére a két hosszúságot külön-külön figyelembe kell majd vennünk. Ha viszont $BC = 2r$, akkor egyértelműen kaptuk meg BP hosszát.

Ezután egy segéd-derékszögű háromszöget szerkesztünk $AA_1/2$ és BP befogókból. Átfogóját $AA_1/2$-vel csökkentve (1) szerint PA_1 hosszát kapjuk, ugyanannyival növelve pedig PA hosszát. Ezekből a PA_1A egyenest akár A, akár A_1 pontjával meghatározhatjuk, vagyis megkapjuk a háromszög hátra levő csúcsát (2. ábra).

1985-04-151-2.eps

2. ábra

1985-04-152-1.eps

3. ábra

Könnyíti a további vizsgálódást, ha az említett derékszögű háromszöget magában az ábrában szerkesztjük meg előbb a P^*B, majd a $P^{**}B$ húrra mint befogóra, és úgy, hogy derékszöge B-nél legyen (3. ábra). A P^*B-re merőlegest Thalész tétele szerint éppen a $P^{**}B$ egyenes szolgáltatja, erre B-től felmérjük a $BK^* = AA_1/2$ szakaszt, majd ugyanezt K^*-tól a K^*P^* egyenesre is mindkét irányban: $K^*Q' = K^*Q'' = AA_1/2$ úgy, hogy $P^*Q'' > P^*Q'$. Ekkor $P^*A_1 = P^*Q'$ és $P^*A = P^*Q''$, tehát a P^* körüli, Q'-n átmenő körrel kimetszhetjük BC-ből A_1-et (A_1^*-ot), valamint k-ból A-t (A^*-ot) a P^* körüli, Q''-n átmenő körrel. E köröknek BC-vel, ill. k-val 2 vagy 1 vagy 0 közös pontja lehet. Ha 2 közös pont van, ez a 2 megoldás nem lényegesen különböző: egymás tükrös párjai a P^*P^{**} tengelyre.

Az ABC háromszög megfelel a követelményeknek, mert körülírt körének sugara az adott r, BC oldala is az előírt hosszúság, továbbá (1) és (2) alapján $AP - A_1P$ az előírt szakasszal egyenlő. Azt kell csak belátnunk, hogy a PA és PA_1 félegyenesek azonosak, a BPA és BPA_1 szögek egyenlők. Ez abból következik, hogy számításunk és szerkesztésünk szerint a PAB és PBA_1 háromszögek hasonlók. (Természetesen a P^*P^{**} tengelynek ugyanazon a partján vesszük az A és A_1 metszéspontokat.)

Elvileg általában helytelen, hogy a PA_1A egyenest kétféleképpen határozzuk meg. Most mégis mellette szól az, hogy a megoldhatóság föltételét keresve látható lesz, hogy a két úton ugyanarra az eredményre jutunk. Tulajdonképpen variánsoknak tekinthetjük a két utat.

A számítást P^*-ra mutatjuk be. Mindkét követelményből felső korlátot kapunk az AA_1 szögfelezőszakaszra. A, ill. A_1 akkor jön létre, ha

$$P^*Q'' \le P^*P^{**} = 2r, \quad \text{ill.} \quad P^*Q' \ge P^*F$$

– ahol F a BC oldal felezőpontja – , azaz (2), ill. (1) behelyettesítésével

$$\sqrt{P^*B^2 + \frac{AA_1^2}{4}} \le 2r - \frac{AA_1}{2}, \qquad \sqrt{P^*B^2 + \frac{AA_1^2}{4}} \ge P^*F + \frac{AA_1}{2}.$$

Pozitív szakaszokról lévén szó, ezekkel az egyenlőtlenségekkel ekvivalenseket kapunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük:

$$P^*B^2 \leq 4r^2 - 2r \cdot AA_1, \qquad P^*B^2 \geq P^*F^2 + P^*F \cdot AA_1,$$
$$AA_1 \leq \frac{4r^2 - P^*B^2}{2r} = \frac{P^{**}B^2}{2r}, \qquad AA_1 \leq \frac{P^*B^2 - P^*F^2}{P^*F} = \frac{BF^2}{P^*F},$$

és a jobb oldal mindkét esetben $P^{**}F$, ti. a $P^*P^{**}B$ derékszögű háromszögre alkalmaztunk ismert mértani középarányos-tételeket.

Hasonlóan, P^{**}-ból kiindulva, a P^*-ot tartalmazó BC íven akkor van megoldás, ha $AA_1 \leq P^*F$.

Alsó korlát nincs az AA_1 szakaszra, nyilvánvaló, hogy a szerkesztés tetszés szerinti kicsi (pozitív) AA_1 mellett végrehajtható.

A 3. ábrán P^*-ból kiindulva *van* megoldás, P^{**}-ból kiindulva viszont nincs, mert $AA_1 > P^*F$.

Összefoglalva: $BC > 2r$ esetén nincs megoldás; $BC = 2r$ esetén a háromszög derékszögű lesz az A csúcsnál, hacsak $0 < AA_1 \leq r$; ha $BC > 2r$, akkor a továbbiak céljára $PF = r \mp \sqrt{r^2 - \frac{BC^2}{4}}$, ha $P^*F < AA_1 \leq P^{**}F$, akkor 1 megoldás van, egyenlőség esetén a háromszög egyenlő szárú; ha pedig $BC < 2r$ és $0 < AA_1 \leq P^*F < P^{**}F$, akkor mindkét BC íven van egy megfelelő A pont.

Megjegyzés. Hasonlóan megy a szerkesztés, ha AA_1 helyett az AA_2 szakasz van előírva, ahol A_2 az A-ból induló külső szögfelezőnek (AP^{**}-nak) a BC egyenessel való metszéspontja.