**I. megoldás.** Az $x^2+x+1$ értéke minden egész $x$-re egész, és nem lehet nulla, mert $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$. Tehát beszélhetünk az $(x^2+x+1)$-gyel való oszthatóságról. Végezzük el az

$$x^{3p}+x^{3m+1}+x^{3n+2}+=(x^{3p}-1)+x(x^{3m}-1)+x^2(x^{3n}-1)+x^2+x+1$$

átalakítást!

Ha $r$ pozitív egész, akkor

$$\begin{aligned}x^{3r}-1=(x^3)^r-1=(x^3-1)\big((x^3)^{r-1}+(x^3)^{r-2}+\ldots+x^3+1\big)=\\=(x-1)(x^2+x+1)(x^{3r-3}+\ldots+x^3+1),\end{aligned}$$

és ez osztható $(x^2+x+1)$-gyel. Ezért osztható $x^{3p}-1$, $x^{3m}-1$ és $x^{3n}-1$ is $(x^2+x+1)$-gyel.

Az $x^{3p}+x^{3m+1}+x^{3m+2}$ számot sikerült tehát felbontanunk négy $(x^2+x+1)$-gyel osztható szám összegére, tehát ő maga is osztható $(x^2+x+1)$-gyel.

**II. megoldás.** $p=m=n=1$ esetén

$$x^{3p}+x^{3m+1}+x^{3n+2}=x^3(1+x+x^2),$$

ami osztható $(x^2+x+1)$-gyel, ha $x$ egész. Tegyük most fel, hogy a $p$, $m$, $n$ pozitív egészekre már tudjuk, hogy ha $x$ egész, akkor $x^2+x+1$ osztója az $x^{3p}+x^{3m+1}+x^{3n+2}$ számnak. Belátjuk, hogy ha a $p$, $m$, $n$ számok egyikét eggyel növeljük, továbbra is $(x^2+x+1)$-gyel osztható számot kapunk. Ekkor ugyanis az $x^{3p}+x^{3m+1}+x^{3n+2}$ szám megváltozása

$$x^{3(r+1)}-x^{3r}=x^{3r}(x^3-1)=x^{3r}(x-1)(x^2+x+1)$$

osztható $(x^2+x+1)$-gyel, tehát az új szám is osztható $(x^2+x+1)$-gyel, ahol $r$ a $p$, $m$ és $n$ közül valamelyik. Nyilvánvaló, hogy a $p=m=n=1$ számhármasból tetszőleges $p$, $m$, $n$ pozitív egészekből álló számhármashoz eljuthatunk véges sok ilyen lépés alkalmazásával. $p=m=n=1$-re a kiindulási szám osztható $(x^2+x+1)$-gyel, és minden lépésben újra $(x^2+x+1)$-gyel osztható számhoz jutunk, ami a feladat állítását igazolja.

*Megjegyzés.* Általában is igaz $n\geq1$-re, hogy ha $k_1$, $k_2$, …, $k_n$ nem negatív egészek és $x$ egész, akkor $x^{k_1n}+x^{k_2n+1}+\ldots+x^{k_nn+n-1}$ osztható $(1+x+\ldots+x^{n-1})$-nel. Ez abból adódik, hogy az $f(x)=x^{k_1n}+x^{k_2n+1}+\ldots+x^{k_nn+n-1}$ polinom osztható a $g(x)=1+x+\ldots+x^{n-1}$ polinommal. A hányados a Gauss–féle lemma miatt (lásd *A prímhatványok egy jellemzéséről*) a $h(x)$ hányados egész együtthatós, tehát ha $x$ egész, akkor $h(x)$ is egész, és $f(x)=h(x)\cdot g(x)$. Az pedig, hogy $f(x)$ osztható $g(x)$-szel, következik *Bezout* tételéből (Molnár Emil: Matematikai versenyfeladatok, 493. old.): $g(x)$-nek mind az $n-1$ (egymástól különböző és komplex) gyöke $f(x)$-nek is gyöke, és ekkor Bezout tétele szerint $g$ osztója $f$-nek. Valóban, ha $g(\alpha)=0$, akkor $0=(\alpha-1)\ g(\alpha)=(\alpha-1)(1+\alpha+\ldots+\alpha^{n-1})=\alpha^n-1$, így

$$f(\alpha)=(\alpha^n)^{k_1}+\alpha\cdot(\alpha^n)^{k_2}+\ldots+\alpha^{n-1}(\alpha^n)^{k_n}=1+\alpha+\ldots+\alpha^{n-1}=0,$$