Észrevehetjük, hogy $D_1D_2 \geq E_1E_2$, hiszen $E_1E_2$ egy húr a $D_1D_2$ átmérőjű körben; ha $AB = AC$, akkor itt egyenlőség áll.

1985-03-111-1.eps

Továbbá legyen $AC > AB$. Húzzunk párhuzamost $D_1D_2$-vel a $B$ ponton keresztül, és messe ez az $AC$ oldalt $G$-ben, az $A$-ból kiinduló szögfelezőt pedig $F$-ben! Ekkor a $D_1D_2GB$ négyszög szimmetrikus trapéz. Mivel $F$ felezi a $BG$, és $A_0$ a $BC$ szakaszt, ezért $A_0F||D_2G$. Így $D_1A_0FB$ is szimmetrikus trapéz, ezért átlói egyenlőek: $BA_0 = D_1F$. Az utóbbi szakasz tükörképe az $A$-ból induló szögfelezőre a $D_2F$ szakasz, így $D_1F = D_2F$. A háromszög-egyenlőtlenségből:

$$D_1F + D_2F \geq D_1D_2.$$

Az eddigieket összegezve:

$$\begin{aligned} BC = 2BA_0 = 2D_1F = D_1F + D_2F \geq D_1D_2 &\geq E_1E_2 \\ BC &\geq E_1E_2. \end{aligned}$$

Itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha $F$ rajta van a $D_1D_2$ egyenesen, vagyis ha $B$ és $C$ is, tehát $AB = AC$, a háromszög egyenlő szárú.

*Megjegyzés.* Rámutatunk a kérdés feltevésének hátterére. A könnyen kapott egyenlőtlenség azt jelenti, hogy ha vesszük azt a forgáskúpot, melynek tengelye a szögfelező és egy alkotója az $AB$ egyenes, és ezt metsszük az $ABC$ síkra merőleges, a $BC$-n átmenő síkkal, akkor a $BC$ szakasz a keletkező metszet ellipszis nagy tengelye, $A_0$ a középpontja, az $E_1E_2$ szakasz pedig megadja a kistengely hosszát. $D_1D_2$ az $A_0$-on átmenő és a tengelyre merőleges metszet (kör) átmérője.