A bal oldalon álló kifejezés értéke az $x=0$ helyen -1, az $x=1$ helyen $+2$. Így a megoldandó egyenlőtlenség nem azonosság, meg kell határoznunk a bal oldal gyökeit. Ott az

$$f(x)=x^6+4x^5+2x^4-6x^3-2x^2+4x-1$$

egész együtthatós polinom áll, ennek racionális gyökei csak az olyan p/q alakú számok közül kerülhetnek ki, amelyekre p osztója a konstans tagnak, q pedig a legmagasabb fokú tag együtthatójának. Mivel esetünkben mindkét szám abszolút értéke 1, racionális gyökként csak a -1 és $+1$ jöhet szóba. Ezek viszont nem gyökök: $f(-1)=-2$ és $f(1)=2$.

Így meg kell próbálnunk a polinomot szorzattá alakítani. Vegyük észre, hogy az együtthatók abszolút értékei szimmetrikusak a középső tagra, és hogy a párokban az előjelek felváltva eltérnek, illetve megegyeznek. Az ilyen polinomokat reciprok polinomoknak szokás nevezni és gyökeik keresésében az $y=x-1/x$ új változó bevezetése segíteni szokott. Tegyük mi is ezt! Legyen $x\neq 0$ és a polinomból emeljünk ki x^3-t:

$$\begin{aligned}
f(x)=x^3\left(\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-6\right)=\\
=x^3\left(\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)+4\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+8+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-6\right)=\\
=x^3(y^3+4y^2+5y+2).
\end{aligned}$$

Az itt álló második tényezőt próbáljuk szorzattá bontani. Észrevesszük, hogy az y^3+4y^2+5y+2 kifejezés az $y=-1$ helyen eltűnik, tehát belőle $(y+1)$ kiemelhető:

$$y^3+4y^2+5y+2=(y+1)(y^2+3y+2)=(y+1)(y+1)(y+2).$$

Ezt $f(x)$ fenti alakjába visszaírva

$$f(x)=x^3(y+1)^2(y+2)=x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)^2\cdot\ x\left(x-\frac{1}{x}+2\right)=(x^2+x-1)^2(x^2+2x-1).$$

A jobb és bal oldal $x\neq 0$-ra a fenti átalakítások ekvivalenciája miatt egyezik meg, $x=0$-ra pedig $f(0)=-1$, és a jobb oldal értéke is -1. A keresett szorzattá alakítást megkaptuk, a megoldandó egyenlőtlenség tehát ilyen alakú:

$$(x^2+x-1)^2(x^2+2x-1)\geq 0.$$

Az első tényező egy valós szám négyzete, így biztosan nemnegatív. Így az egyenlőtlenség akkor áll, ha vagy

$$x^2+x-1=0,$$

vagy

$$x^2+2x-1\geq 0.$$

Az első eset az $x_1=(-1-\sqrt{5})/2$ és az $x_2=(-1+\sqrt{5})/2$ számokra teljesül, a második pedig akkor, ha $x\leq -1-\sqrt{2}$ vagy $x\geq -1+\sqrt{2}$. Ez utóbbi magában foglalja x_2-t, hiszen $x_2>-1+\sqrt{2}$.

Összefoglalva, az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$x\leq -1-\sqrt{2},\qquad \text{vagy}\qquad x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\qquad \text{vagy}\qquad x\geq -1+\sqrt{2}.$$

Megjegyzés. Sok megoldó okoskodott a szorzattá bontás után úgy, hogy egy szám négyzete nemnegatív, tehát az egyenlőtlenség ekvivalens az $x^2+2x-1\geq 0$ egyenlőtlenséggel. Ez a gondolat hibás, az ilyen dolgozatra 3 pont járt.