a) Legyen az $ADC\sphericalangle=\alpha$, és a DB félegyenesnek az ACD síkkal bezárt szöge β. Ekkor az ACD háromszög területe

$$\frac{DA\cdot DC\cdot\sin\alpha}{2},$$

és az $ABCD$ tetraédernek az ACD háromszöglaphoz tartozó magassága $DB\cdot\sin\ \beta$, vagyis az $ABCD$ tetraéder térfogata

$$\frac{DA\cdot DB\cdot DC\cdot\sin\ \alpha\cdot\sin\ \beta}{6}.$$

1985-03-107-1.eps

Ugyanígy az $A_1B_1C_1D_1$tetraéder térfogata

$$\frac{DA_1\cdot DB_1\cdot DC_1\cdot\sin\ \alpha\cdot\sin\beta}{6},$$

vagyis a két térfogat aránya valóban

$$\frac{DA\cdot DB\cdot DC}{DA_1\cdot DB_1\cdot DC_1},$$

hacsak A_1, B_1, C_1 egyike sem azonos D-vel.

Az állítás akkor is érvényes, ha az A_1, B_1, C_1 pontokat – esetleg mind a hármat – is rendre a DA, DB, DC él D-n túli meghosszabbításán vesszük föl, hiszen akkor α és β helyére $180^\circ-\alpha$, ill. $180^\circ-\beta$ lép, de ezek sinusa ugyanannyi.

b)

1985-03-107-2.eps

Legyen LM és LK felezőpontja Q, ill. R. Állítjuk, hogy a $PQR=\Sigma$ sík az LN egyenest abban az X pontban metszi, amely az L pont tükörképe az N-re, vagyis $XN=NL$. Ugyanis így választva X-et, XQ és MN az LMX háromszög súlyvonalai, és metszéspontjuk a súlypont, ez harmadolja MN-et, vagyis azonos P-vel. Megfordítva: a QPegyenes és vele a Σ sík X-ben metszi LN-t.

Ugyanígy kapjuk, hogy az XR egyenes – és vele a síkunk is – harmadában metszi a KN élt az S pontban: $KS=2\cdot SN$.

Azt pedig eleve tudtuk Σ-ról, hogy a KM élt nem metszi, hanem párhuzamos vele, hiszen QR egyenes az LKM háromszög középvonala.

Ezek szerint Σ a $PQRS$ négyszög oldalaiban metszi a $KLMN=T$ tetraéder lapjait, és T darabjai 5-lapú testek, további lapjaik 2–2 négyszög és 2–2 háromszög. Azt a darabot, amelyik az LN élt a maga egészében tartalmazza, megkapjuk az $LQRX$ és $NPSX$ tetraéderek különbségeként. Ezekre – T-vel párba állítva – alkalmazható az a) részben bebizonyított tétel, illetve annak kiterjesztése. Az első pár $LRQX$ és $LKMN$, a második pár $NSPX$ és $NKML$. A térfogatarányok 3–3 tényező szorzatai, mindegyik tényező olyan két szakasz aránya, amelyek ugyanazon egyenesnek részei és amelyeknek egyik végpontja közös, az L, ill. N csúcs:

$$\frac{LR}{LK}\cdot\frac{LQ}{LM}\cdot\frac{LX}{LN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{NS}{NK}\cdot\frac{NP}{NM}\cdot\frac{NX}{NL}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{9}.$$

Tehát a kettévágott tetraéder LN-t tartalmazó darabjának a térfogata az eredetinek $\frac{1}{2}-\frac{1}{9}=\frac{7}{18}$ része. Így a másik – a KM élt tartalmazó – darabra a térfogat $11/18$ része marad, végül a két rész térfogatainak aránya $7:11$.