I. megoldás. Nyilvánvaló, hogy ha találtunk egy megoldást, annak az AO egyenesre való tükörképe is megoldás, ahol O az adott k kör középpontját jelöli.

Mindig van olyan megoldás, amely önmagának a tükörképe, vagyis a keresett húr merőleges AO-ra, tehát párhuzamos a BC húrral. Ezt a következő két lépéssel kapjuk: jelöljük B-nek C-re való tükörképét B^*-gal és az AB^* egyenesnek k-val való második metszéspontját E-vel. Ezzel készen is vagyunk. E a keresett DE húr egyik végpontja, és ezt AB-vel, AC-vel való D_1, E_1 metszéspontjai nyilván három egyenlő darabra osztják (1. ábra).

1984-12-443-1.eps

1. ábra

Tegyük fel, hogy van olyan, AO-ra nem szimmetrikus FG húr is a k-ban, amelynek AB-vel, AC-vel való F_1, G_1 metszéspontjaira $FF_1 = F_1G_1 = G_1G$ és $AF_1 > AG_1$. Tekintsük az AF_1G_1 háromszög köré írt k_1 kört, ezen is az A-t nem tartalmazó F_1G_1 ív O_1 felezőpontját (2. ábra).

1984-12-444-1.eps

2. ábra

Ismeretes, hogy O_1-ben metszi egymást az F_1AG_1 szög f_1 felezője és az F_1G_1 húr m_1 felező merőlegese. Ámde f_1 az eredeti BAC szöget is felezi, így $AB = AC$ miatt f_1 átmegy O-n, másrészt m_1 az FG húrnak is felező merőlegese $FF_1 = G_1G$ miatt, ennélfogva m_1 is átmegy O-n, tehát O_1 azonos O-val.

Ezek alapján a keresett alakzathoz hasonlót szerkeszthetünk az alábbiak szerint. Legyenek F^*, F_1^*, G_1^*, G^* egy egyenes egymás utáni pontjai úgy, hogy $F^*F_1^* = F_1^*G_1^* = G_1^*G^*$. Szerkesszük meg az egyenes egyik partján az $F_1^*G_1^*$ szakasz $BAC\sphericalangle = \alpha$ nyílású i_1 látókörívét, vegyük hozzá a teljes körré kiegészítő i_1' ívét a másik parton, jelöljük i_1' felezőpontját O_1^*-gal, és rajzoljuk meg O_1^* körül az F^*-on (és G^*-on) átmenő k^* kört (3. ábra). Ha k^*-nak van közös pontja i_1-gyel – legyen a jele A^* –, akkor az A^*, F^*, G^*, F_1^*, G_1^* alakzat hasonló a keresett A, F, G, F_1, G_1 alakzathoz.

1984-12-444-2.eps

3. ábra

A keresettel egybevágó alakzatot úgy kapunk, hogy az $A^*O_1^*$ félegyenesre A^*-tól fölmérjük az $A^*O^{**} = AO$ sugarat, az O^{**} körüli, OA sugarú körrel az A^*F^*, A^*G^* egyenesből kimetsszük F^{**}-ot, ill. G^{**}-ot. Végül az adott körből kimetsszük A-tól A^*F^{**}, ill A^*G^{**} távolságra levő F, ill. G pontot. Ezek a keresett húr végpontjai. (Az utolsó két lépéssel FG tükörképének végpontjait is megkaphatjuk.)

A szerkesztés helyességének bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

Megjegyzések. 1. Érdekes változatot írt le az idézett verseny egyik résztvevője a tengelyszimmetrikus húr szerkesztésére. Legyen B, C vetülete a kör A-beli érintőjére B_0, C_0, a B_0B és C_0C szakasznak az érintőhöz közelebbi harmadoló pontja B', ill. C', ekkor a keresett húr végpontjait k-ból az AB', AC' félegyenes metszi ki (4. ábra).

1984-12-445-1.eps

4. ábra

Föntebb az AO tengelyre merőleges irányú, 3-szoros nyújtással kaptuk C-ből B^*-ot, itt viszont AO irányú 1/3-os zsugorítás történt.

Mondhatjuk ezt is: az illető takarékoskodott a papírral. Megjegyezzük, hogy a szerkesztésekre szokásosan tett korlátozások között – mint: csak egyenes vonalzó vagy csak körző használata, korlátozott hosszúságú vonalzó stb. – szerepelnek terjedelemkorlátozások is. Például az A pont összekötendő a b és e egyenesek M metszéspontjával, annak ellenére, hogy M kiesik a rajzlapról.

2. A fönti „elemi” megoldás mellé közlünk olyat is, amely számításon alapul. Oka kettős. A fenti 4 megoldót leszámítva minden beküldő számításra támaszkodott, és az idézett versenyen sem érkezett elemi megoldás. A másik: a fenti szép megoldásban kissé ködbe vész a megoldhatóság feltétele: „...amennyiben k^*-nak van közös pontja az i_1 ívvel...”

II. megoldás. Kiszámítjuk az $OF_1 = OG_1 = r$ szakasz hosszát $OA = 1$-ből és a $BAC\sphericalangle = 2\varphi$ szögből. Legyen a keresett FG húr és az F_1, G_1 harmadoló pontjai közti szakasz közös felezőpontja H és $OH = d$. Az $FH = 3F_1H$ követelményből

$$1 - d^2 = 9(r^2 - d^2).$$

Az I. megoldás szerint O rajta van az AF_1G_1 háromszög körülírt körén, másrészt az F_1G_1 egyenesnek A-t nem tartalmazó partján; ezért $F_1OH\sphericalangle = = 90^\circ - \varphi$ és $OF_1H\sphericalangle = \varphi$, $d = r\sin\varphi$. Ezekből

$$9r^2 = 1 + 8d^2 = 1 + 8r^2\sin^2\varphi,$$
$$r = \frac{1}{\sqrt{9 - 8\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 8\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2AB^2}}.$$

Ez a szakasz a következő lépésekben szerkeszthető.

1984-12-446-1.eps

5. ábra

Legyen $BJ = BA$ és $JBA\sphericalangle = 90^\circ$, továbbá $JK = OA = 1$ és $KJA\sphericalangle = 90^\circ$, végül J vetülete AK-n L (a JK átmérőjű kör második közös pontja AK-val, 5. ábra). Könnyű belátni, hogy ekkor $KL = r$, tehát a keresett húr harmadoló pontjait az O körüli, KL sugarú kör metszi ki az adott AB, AC húrokból.

F_1 létrejön, ha $OF_1 = KL \geq OI$, ahol I az AB húr felezőpontja.

$$\frac{1}{1 + 2AB^2} \geq 1 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2, \qquad AB \geq \sqrt{\frac{7}{2}},$$
$$\varphi \leq \text{arc cos}\sqrt{\frac{7}{8}} = 20^\circ\, 42'\, 17'',$$
$$2\varphi \leq \text{arc cos}\,\frac{3}{4}.$$

Ha $2\varphi \geq \text{arc cos}\,0{,}75$, akkor csak a triviális megoldás jön létre. Egyenlőség esetén F_1, G_1 a húr felezőpontjába esik, emiatt $F_1G_1 \parallel BC$.