Ha a négy pont közül kettő egybeesik, ezek távolsága nulla, a többi öt távolság legföljebb egy, így a hat távolság négyzetösszege legfeljebb 5. Az 5 el is érhető; ha három pont szabályos egységnyi oldalú háromszöget alkot, s a negyedik egybeesik e három pont valamelyikével.

Most belátjuk, hogy ha a négy pont különböző, akkor a hat távolság négyzetösszege kisebb 5-nél. Ismeretes ugyanis, hogy ha A, B, C különböző pontok, akkor a BC^2 aszerint kisebb vagy egyenlő, vagy nagyobb (AC^2+AB^2)-nél, hogy a BAC szög kisebb, egyenlő vagy nagyobb $90°$-nál. $\big[$Ez következik például abból, hogy a koszinusz-tétel szerint $BC^2-(AC^2+AB^2)=2AC\cdot AB\cdot\cos BAC\sphericalangle$.$\big]$ Ha tehát a négy pont között van három, A, B, C, amelyre $BAC\sphericalangle>90°$, akkor $BC^2+AB^2+AC^2<2BC^2\le 2$, másrészt a negyedik pont távolsága e három pont mindegyikétől legföljebb 1, tehát a hat távolság négyzetösszege kisebb 5-nél. Maradt az az eset, ha a négy pont mind különböző és nincs közte három A, B, C, amelyre $BAC\sphericalangle>90°$. Belátjuk, hogy ekkor a négy pont téglalapot alkot. Tekintsük ugyanis a négy pont konvex burkát. Ez nem lehet szakasz, hiszen akkor a négy pont egy egyenesen volna, s a két szélsőt választva B-nek és C-nek, valamelyik belsőt A-nak, a $BAC\sphericalangle=180°$ volna, ami nagyobb $90°$-nál. Ha a konvex burok háromszög, akkor a negyedik pont ennek belsejében van. Ebből a pontból valamelyik oldal $120°$-os vagy annál nagyobb szögben látszik, s így megint találtunk A,B,C pontokat, amelyekre $BAC\sphericalangle\ge 120°>90°$. Ha végül a konvex burok négyszög, akkor a négy pont konvex négyszöget alkot. Ez vagy téglalap, vagy valamelyik csúcsában $90°$-nál nagyobb szög van. Utóbbi esetben megint találtunk három pontot, amelyre $BAC\sphericalangle>90°$. (A a tompaszög csúcsa, B és C a két szomszédos csúcs.) Ezekben az esetekben tehát készen vagyunk. Az az egyetlen eset maradt hátra, mikor a négy pont téglalapot alkot. Legyen ez a téglalap $ABCD$. Pitagorasz tétele szerint $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2AC^2$ és másrészt $BD=AC$, tehát a hat távolság négyzetösszege most $4AC^2\le 4$. Ezzel beláttuk, hogy a hat távolság négyzetösszege akkor maximális, ha a négy pont közül három egy egységnyi oldalú szabályos háromszöget alkot, s a negyedik pont ezek egyikével egybeesik. A távolságok négyzetösszege ekkor 5.

Megjegyzés. A bizonyítás során tulajdonképpen azt láttuk be, hogy négy pont között mindig van három, A, B, C, amelyek vagy egy egyenesen vannak, vagy amikre $BAC\sphericalangle\ge 90°$.