Megoldás. I. az AB, AC ($\neq 0$) szárak egyenlősége biztosítja, hogy a B és C pontok által a forgatások közben leírt körök metszik egymást, hiszen mindkettő rajta van az A körüli AB sugarú gömbön. A kérdés e két kör vizsgálatára egyszerűsödik, hiszen a metszéspontokat A-val összekötő egyenesek lesznek a két kúpfelület közös alkotói. Legyen B tükörképe AC-re B_1 és C képe AB-re C_1, ekkor a körök egy-egy átmérője BB_1, ill. CC_1, és síkjaik merőlegesek az ABC síkra. Így a körök vetülete a BB_1, ill. CC_1 szakasz, ezek D metszéspontja a közös D_1, D_2 pontok vetülete, és ez rajta van a BAC szög f felező egyenesén, hiszen f az egész alakzatnak szimmetriatengelye, a $D_1AD_2 = S_1$ síkra nézve a két kúpfelület egymás tükörképe.

1985-01-015-1.eps

1.a ábra

1985-01-015-2.eps

1.b ábra

Legyen még C vetülete AB-re C_0, ez a C által leírt kör középpontja, továbbá $BAC\sphericalangle = \alpha$. Az $\alpha = 90^\circ$ esetet tüstént kizárhatjuk, mert ekkor a forgatások nem kúpfelületeket adnak, hanem a forgástengelyre merőleges síkokat, és ekkor a kérdésnek nincs tartalma, hiszen a két sík egyetlen egyenesben metszi egymást, mely az A pontban merőlegesen áll a BAC síkra.

Így már elegendő a $BAC\sphericalangle = \alpha < 90^\circ$ esettel foglalkoznunk, elvégre a mindkét irányban vég nélküli AB, AC egyeneseket forgatjuk. Ha $BAC\sphericalangle > 90^\circ$ volna és C tükörképe A-ra C^*, akkor ezt véve C helyén, ugyanazt a kúpot kapjuk és $BAC^*\sphericalangle < 90^\circ$.

Legyen egyelőre $\alpha < 60^\circ$, és jelöljük a keresett D_1AD_2 szöget φ-vel. A D_1AD_2 egyenlő szárú háromszögből

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{DA}{D_1A} = \frac{DA}{CA} = \frac{AC_0}{\cos\frac{\alpha}{2}} : \frac{AC_0}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Az $\alpha = 60^\circ$ esetben a két kúpfelületnek egy további közös alkotója adódik: az ekkor azonossá váló AB_1, AC_1 egyenesek. A két felület érinti egymást ezen egyenes mentén. Ez a közös alkotó derékszöget zár be az előzőek mintájára keletkező AD_1-gyel és AD_2-vel.

Innen kezdve, vagyis a $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ értékekre, figyelembe kell vennünk, hogy tulajdonképpen ún. *kettős kúpok* keletkeznek és metszik egymást. Például az AC félegyenes által leírt egyszerű kúpnak az A pontra való tükörképe is hozzátartozik a vizsgálandó alakzathoz. Ezt a tükörképet az AC^* félegyenes írja le.

1985-01-016-1.eps

2. ábra

A 2. ábra ilyen helyzetben a B^*, C^* pontok által leírt körök vetületét is mutatja az ABC síkra, mint az A körüli AB sugarú kör húrjait. A húrok E, F, G újabb közös pontja fölött és alatt is metszi egymást, $2-2$ közös alkotó, ekkor a számuk (mindkét irányban végtelen alkotókat értve) 4, hiszen F_2 ugyanazt az alkotót határozza meg, mint D_1, s í. t. A térbeli helyzetet mutató 3. ábráról a $B^*B_1^*$ átmérőjű kört elhagytuk.

1985-01-016-2.eps

3. ábra

Az „újabb fajta" közös alkotók közti $E_1AE_2 = \psi$ szögre az előbbi számításhoz hasonlóan

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

adódik.

Egy korábbi és egy újabb közös alkotó hajlásszöge csak egyféle lehet, a $D_1AE_1\sphericalangle = \omega$ minden párbaállításba átvihető alkalmas szimmetriával, hiszen a két kúpfelület alakzatának az $E_1AE_2 = S_2$ sík is szimmetriasíkja.

Az E_1AD_1 egyenlő szárú háromszög D_1E_1 alapját annak a téglatestnek testátlójaként számíthatjuk, melynek egy-egy lapsíkja S_1, S_2, és további két lapsíkja ezekre merőleges, átmegy D_1-en, ill. E_1-en. Éleinek hosszát megadja AD, AE és $D_1D - E_1E$, másképpen $AB\cos\dfrac{\varphi}{2}$, $AB\cos\dfrac{\psi}{2}$ és $AB\left(\sin\dfrac{\varphi}{2} - \sin\dfrac{\psi}{2}\right)$. Ezek négyzetösszege

$$D_1E_1^2 = AB^2\left(2 - 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\right),$$

és így, mivel $AD_1 = AB$,

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{D_1E_1}{2AB} = \sqrt{\frac{1-\sin\varphi/2\sin\psi/2}{2}}.$$

II. Áttérve a feladat második kérdésére, ezt így is föltehetjük: a közös alkotók szöge 0°, ezektől elfordulva az egyes kúpokon, elérhető-e köztük a 90°-os szög? Nehogy két független változónk legyen a forgatásban, forgassuk az AC tengelyű kúpon az AM alkotókat az AD_1 helyzettől AB_1 felé (M az alapkörön halad), és tekintsük ennek AN tükörképét S_1-re, ami rajta van a másik kúpon (1. ábra).

Az MAN szög nyilván folytonosan növekszik, míg M a B_1-be érkezik, majd visszacsökken 0°-ra, mire M a D_2 -be ér. A szög legnagyobb értéke a $B_1AC_1\sphericalangle$.

Mármost ha $\alpha \leq 30^\circ$, akkor $B_1AC_1\sphericalangle \lesseqqgtr 90^\circ$, tehát merőleges alkotópárt $30^\circ \leq \alpha (< 90^\circ)$ esetén lehet kiválasztani a kúpokról.

Megjegyzés. A 2. ábra alapján egyszerű *szerkesztés* adódik a szögekre. Legyen a k körnek AD-re merőleges húrja $(D_1)(D_2)$. A végpontokat tekinthetjük D_1 és D_2 beforgatottjának f körül az ABC síkba – a gömb S_1-beli körével együtt –, ekkor $\varphi = (D_1)A(D_2)\sphericalangle$. Ugyanígy $\psi = (E_1)A(E_2)\sphericalangle$.

Az $\omega = D_1AE_1\sphericalangle$ céljára D_1E_1 annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, melynek befogói DE és $D(D_1) - E(E_1)$, ekkor ω a k-ban D_1E_1 hosszúságú húrhoz tartozó középponti szög.