Ilyen $n$-szög létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az 1, 2, 3, $\ldots$, $n$ hosszúságú, megfelelő irányú vektorok összege a nullvektor legyen. Megfelelő irányon azt értjük, hogy bármely két egymás utáni oldalvektor iránykülönbsége a forgási irányt is beleértve $360^\circ/n$, ti. amennyi az egyenlő szögű konvex $n$-szög külső szöge. Jelöljük $i=1$, 2, $\ldots$, $n$-re az $i$-edik oldal hosszát $a_i$-vel, az oldallal egyező irányú egységvektort $\mathbf{x}_i$-vel. Az $\mathbf{x}_i$ vektorokat közös kezdőpontból felmérve azok végpontjai szabályos $n$-szöget határoznak meg.

Feladatunk tehát az 1, 2, $\ldots$, $n$ számoknak olyan $a_1$, $\ldots$, $a_n$ permutációját meghatározni, amire az

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ \ldots\ + a_n\mathbf{x}_n \tag{1}$$

vektorösszeg éppen a nullvektor. Ha sikerül ilyen permutációt találnunk, akkor az $a_1\mathbf{x}_1$, $a_2\mathbf{x}_2$ stb. vektorokat egymás után fölmérve, egy záródó konvex $n$-szöget kapunk, amelynek szögei egyenlők, oldalai pedig valamilyen sorrendben 1, 2, 3, $\ldots$, $n$ hosszúságúak. Ha pedig nincs ilyen permutáció, akkor a megfelelő sokszög sem létezik.

1985-03-105-1.eps

*1. ábra*

Térjünk most rá az $n=10$ esetre. A közös kezdőpontból induló $\mathbf{x}_1$, $\ldots$, $\mathbf{x}_{10}$ vektorokat az 1. ábra mutatja. Az (1) vektorösszeg pontosan akkor $\mathbf{0}$, ha két, nem párhuzamos egyenesre eső vetülete is 0. Az egyik egyenes legyen az $\mathbf{x}_{10}$ (és $\mathbf{x}_5$) vektorokra merőleges egyenes. Az $a_i\mathbf{x}_i$ ilyen irányú komponense $a_i\sin(i\cdot 36^\circ)$. A $\sin i\cdot 36^\circ$ tényező abszolút értéke – azon fölül, hogy $i=5$ és $i=10$ esetén 0 – kétféle értéket vehet föl az összegezés során. Ennek alapján a tagokat két zárójelbe gyűjtjük:

$$(a_1+a_4-a_6-a_9)\sin 36^\circ + (a_2+a_3-a_7-a_8)\sin 72^\circ = 0. \tag{1}$$

Feladatunkban a zárójelek értéke egész szám, másrészt

$$\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

irracionális szám. Emiatt az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha a zárójelek értéke külön-külön 0. Ezt mindjárt így írjuk:

$$a_1-a_6=a_9-a_4 \tag{2}$$

$$a_3-a_8=a_7-a_2, \tag{3}$$

továbbá (2) és (3) teljesülése esetén az (1) összegvektor $\mathbf{x}_{10}$-re merőleges vetülete 0.

Megismételve az eljárást az $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{x}_7$ vektorokra merőleges egyenesre is, adódik, hogy (1)-nek erre eső vetülete akkor és csak akkor, 0, ha

$$a_3-a_8=a_1-a_6 \tag{4}$$

valamint

$$a_5-a_{10}=a_9-a_4 \tag{5}$$

egyaránt fennáll.

Észrevesszük, hogy (2) két oldalának közös értékét $d$-vel jelölve (2)–(5) éppen azt mondja ki, hogy a keresett tízszög szemközti, párhuzamos oldalpárjai hosszának különbsége – alkalmas irányban véve – egyenlő. És úgy lesznek előjelre nézve is egyenlők, ha pl. mindig a páratlan indexű oldalból vonjuk ki a szemben fekvő, tehát páros indexű oldal hosszát. S mivel ilyen esetben (2)–(5) automatikusan teljesül is, a tízszög záródni fog.

Már ennyi elég ahhoz, hogy példát adhassunk a kívánt tízszögre. $d=-5$ esetén az $(a_i,\ a_{i+5})$ szemben fekvő oldalpár számára $i=1$, 2, 3, 4, 5 mellett vehető a következő oldalhossz-párok tetszőleges permutációja:

| $a_i$ | 1 | 7 | 3 | 9 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_{i+5}$ | 6 | 2 | 8 | 4 | 10 |

Másik példa az oldalhosszak párba állítására $d=-1$ :

| $a_i$ | 1 | 4 | 5 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_{i+5}$ | 2 | 3 | 6 | 7 | 10 |

Befejezésül belátjuk, hogy $|d|$ az előírt oldalhosszak mellett csak 1 vagy 5 lehet. Jelöljük a páratlan indexű oldalak összegét $U$-val, a párosakét $P$-vel, ekkor a föntiek szerint $U-P=5d$, másrészt $U+P=55$, amiből

$$\frac{U}{5}=\frac{11+d}{2}, \qquad \frac{P}{5}=\frac{11-d}{2}.$$

Eszerint $d$ nem lehet páros.

Nyilván nem lehet $d \geq 9$. De még a $d=7$ különbséget is csak három oldalhossz párból lehet előállítani:

$$7=10-3=9-2=8-1.$$

Ha pedig $d=3$-at követelünk meg, az 5 (és 6) számtól föl- és lefelé 1–1 szám van 3 egységnyi távolságban: a 2 és a 8, és egyik sem alkothat 3 értékű különbséget máshogy, mint az 5-össel.