A paralelogramma átlói felezik egymást, legyen tehát F az AC és BD átlók közös felezőpontja. Nyilván $AF/BF = AC/BD$, elég tehát belátni, hogy

$$\frac{AF}{BF} \le \operatorname{ctg}\frac{BAD\sphericalangle}{2}.$$

1984-12-442-1.eps

Legyen K az ABD háromszög köré írt kör középpontja. A feltétel szerint $BAD\sphericalangle \le ADC\sphericalangle$. E két szög összege 180°, tehát $BAD\sphericalangle \le 90^\circ$. Ebből következik, hogy K és A a BD egyenesnek ugyanazon a partján van. Legyen G a BD szakasz FK felező merőlegesének valamint az ABD köré írt körnek az a metszéspontja, amire G és A a BD egyenesnek ugyanarra a partjára esik. A BAD és a BGD kerületi szögek egyenlők, GF pedig felezi a BGD szöget, tehát

$$\operatorname{ctg}\frac{BAD\sphericalangle}{2} = \operatorname{ctg}\frac{BGD\sphericalangle}{2} = \operatorname{ctg}\, BGF\sphericalangle = \frac{GF}{BF}.$$

Másrészt

$$GF = GK + KF = AK + KF \ge AF,$$

a háromszög egyenlőtlenség szerint. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\operatorname{ctg}\frac{BAD\sphericalangle}{2} = \frac{GF}{BF} \ge \frac{AF}{BF},$$

ahogy állítottuk.

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $AK + KF = AF$. Ez két esetben fordulhat elő: ha $A = G$ vagy ha $K = F$. Előbbi esetben a paralelogramma rombusz, mert $AB = BD$, utóbbi esetben a paralelogramma téglalap, mert $BAD\sphericalangle = 90^\circ$.