Bizonyítsuk be, hogy minden a, b, c valós számhármashoz van olyan egynél nem nagyobb abszolút értékű x szám, amelyre

(1) $$|\, x^3+ax^2+bx+c\,| \geqq 1/4.$$

Írható-e az egyenlőtlenségben 1/4 helyett nagyobb szám?

I. megoldás. *a*) Jelöljük az x^3+ax^2+bx+c kifejezést $f(x)$-szel. Azt állítjuk, hogy tetszőleges a, b, c-re az $f(-1)$, $f(-0,5)$, $f(0,5)$ és $f(1)$ valamelyikének abszolút értéke legalább 1/4, tehát a feladatbeli x-et e négy szám egyikének is választhatjuk. Ez utóbbi állításunk igazolásához nyilván elegendő megmutatni, hogy

(2) $$|f(1)|+2\cdot|f(0,5)|+2\cdot|f(-0,5)|+|f(-1)|\geq \frac{1}{4}(1+2+2+1)=\frac{3}{2}.$$

Ennek igazolására többször is felhasználjuk a tetszőleges p, q számokra érvényes

$$|p+q|+|q|\geq|p|$$

egyenlőtlenséget. (2) bal oldalának első és utolsó tagjára

$$|1+a+b+c|+|-1+a-b+c|=$$
$$=|2+2b+(-1+a-b+c)|+|-1+a-b+c|\geq|2+2b|.$$

A középső tagokra ugyanígy

$$2\cdot\left|\frac{1}{8}+\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right|+2\left|-\frac{1}{8}+\frac{a}{4}-\frac{b}{2}+c\right|=\left|\frac{1}{2}+2b+\left(-\frac{1}{4}+\frac{a}{2}-b+2c\right)\right|+$$
$$+\left|-\frac{1}{4}+\frac{a}{2}-b+2c\right|\geq\left|\frac{1}{2}+2b\right|.$$

(2) bal oldalának értéke ezek szerint legalább

$$|2+2b|+\left|\frac{1}{2}+2b\right|=\left|\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}+2b\right)\right|+\left|\frac{1}{2}+2b\right|\geq\frac{3}{2},$$

ahogyan állítottuk.

b) A feladat kérdésére tagadó a válasz, ennek bizonyításához elegendő olyan a, b, c számokat találnunk, melyekre az $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ abszolút értéke a $[-1,\,+1]$ intervallumon legfeljebb 1/4. Az $a=0$, $b=-3/4$, $c=0$ ilyen számhármas: $-1\leq x\leq 1$ esetén

$$x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(x-1)\leq 0 \text{ és } x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x+1)\geq 0,$$

tehát ebben az intervallumban valóban

$$-\frac{1}{4}\leq x^3-\frac{3}{4}x\leq\frac{1}{4}.$$

II. megoldás. Először a feladat második felét oldjuk meg. Ismeretes, hogy $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$. Ezért ha x a $[-1,\,+1]$ intervallumba esik, akkor α-t úgy választva, hogy $x=\cos\alpha$ legyen, a következő teljesül:

$$|4x^3-3x|=|4\cos^3\alpha-3\cos\alpha|=|\cos 3\alpha|\leq 1.$$

Következésképpen a $g(x)=x^3-\frac{3}{4}x$ függvényre a $[-1,\,+1]$ intervallumon

(3) $$g(x)\leq\frac{1}{4},$$

vagyis (1)-ben az 1/4 helyébe nagyobb számot nem lehet írni. (3)-ben egyenlőség áll, ha $x=\cos\alpha$ olyan, hogy $|\cos 3\alpha|=1$, vagyis $3\alpha=k\pi(k=0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots)$. Tehát x az alábbi

$$x_0=-1,\; x_1=\frac{1}{2},\; x_2=\frac{1}{2},\; x_3=1$$

értékek valamelyike, mégpedig $g(x_0)=g(x_2)=-1/4$, és $g(x_1)=g(x_3)=1/4$.

Ezek után a bizonyítandó állítással ellentétben tegyük fel, hogy valamely a, b, c számhármasra az $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ polinom értéke a $[-1,\,+1]$ intervallumon végig kisebb 1/4-nél. Nézzük a $h(x)=f(x)-g(x)$ polinomot! $h(x)$

legfeljebb másodfokú, következésképp vagy azonosan nulla, vagy legfeljebb két gyöke lehet. Ám indirekt feltevésünk szerint az $|f(x_0)|$, $|f(x_1)|$, $|f(x_2),|$ és $|f(x_3)|$ mindegyike kisebb 1/4-nél, így

$$\begin{aligned} h(x_0) &= f(x_0) - g(x_0) > -\frac{1}{4} - g(x_0) = 0, \\ h(x_1) &= f(x_1) - g(x_1) < \frac{1}{4} - g(x_1) = 0, \\ h(x_2) &= f(x_2) - g(x_2) > -\frac{1}{4} - g(x_2) = 0, \\ h(x_3) &= f(x_3) - g(x_3) < \frac{1}{4} - g(x_3) = 0. \end{aligned}$$

$h(x)$ tehát az x_0, x_1, x_2 és x_3 helyeken felváltva pozitív illetve negatív. Így nem azonosan nulla és kell gyökének lennie x_0 és x_1 között, x_1 és x_2 között, valamint x_2 és x_3 között is. Ez már három (különböző) gyök volna, ami ellentmond annak a megállapításunknak, hogy a $h(x)$-nek legfeljebb két gyöke van.

Megjegyzés. A második megoldásból az is kiolvasható, hogy ha az n-edfokú

$$g_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot x + c$$

polinom a $[-1, +1]$ intervallumban $(n+1)$ különböző helyen ugyanolyan $\varepsilon >$
> 0 abszolút értékű, mégpedig felváltva hol pozitív, hol negatív előjellel, akkor tetszőleges $a_{n-1} \ldots, a_1$, a_0 számokra az

$$f_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

polinom abszolút értéke a $[-1, +1]$ intervallumban nem lehet mindenütt kisebb ε-nál.

Azt sem nehéz belátni, hogy

$$\cos nx = 2^{n-1}\cos^n x - (n+1) \cdot 2^{n-3}\cos^{n-2} x + \ldots$$

Így ha c_i-nek a $\cos^i x$ együtthatója $2^{-(n-1)}$-szeresét választjuk

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \tag{4}$$

és ezt az értéket a $g_n(x)$ függvény $(n+1)$ helyen váltakozó előjellel veszi fel. Tehát tetszőleges a_1, a_2, $\ldots$, a_{n-1} számokhoz van olyan legfeljebb 1 abszolút értékű x, amivel

$$|x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget úgyis fogalmazhatjuk, hogy ha a $[-1, +1]$ intervallumon az x^n függvényt akarjuk közelíteni egy legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinommal, akkor a hiba valahol $2^{-(n-1)}$ vagy annál nagyobb lesz. (4) szerint $(g_n(x) - x^n)$ a lehető legjobban közelít, és az is könnyen adódik, hogy ez az egyetlen. $g_n(x)$-et egyébként *másodfajú Csebisev-polinomnak* nevezik, sok további érdekes és fontos tulajdonsága is van.