

Ismeretes a következő azonosság:

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y)(x + z)(y + z).$$

Mint hogy $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 3$, ezért

$$\begin{aligned} 3(x + y)(x + z)(y + z) &= 3^3 - 3 = 24, \quad \text{azaz} \\ (x + y)(x + z)(y + z) &= 8. \end{aligned}$$

Itt a bal oldalon álló szorzat tényezői egészek, és mivel $x + y + z = 3$, ezért a tényezők összege 6, ami páros. A tényezők közül tehát páros számú, azaz vagy 0 vagy 2 darab lehet páratlan.

Ha minden tényező páros, akkor mindegyikük abszolút értéke 2, és mint hogy összegük 6, ezért

$$x + y = x + z = y + z = 2.$$

Ekkor $x = x + y + z - (y + z) = 3 - 2 = 1$, és hasonlóan $y = z = 1$.

Ha két páratlan tényező van, akkor ezek értéke +1 vagy -1, így a harmadik tényező +8 vagy -8. Ez utóbbi azonban nem lehet, mert ekkor a tényezők összege legfeljebb -6 lehetne. Így az egyetlen páros tényező 8, a másik kettő pedig -1.

Három eset lehetséges, az egyik

$$x + y = 8 \quad x + z = y + z = -1.$$

Ekkor $x = x + y + z - (y + z) = 3 + 1 = 4$, és hasonlóan $y = 4$, $z = -5$. A tényezők alkalmas felcserélésével még két megoldást kapunk.

Az egyenletet tehát négy, egészekből álló számhármassal elégíti ki, amelyek helyességéről visszahelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk:

$$x = y = z = 1; \quad x = y = 4, \quad z = -5; \quad x = z = 4, \quad y = -5; \quad y = z = 4, \quad x = -5.$$