a) az MBF háromszög BF oldala rögzített, ezért területe akkor lesz legnagyobb, amikor a BF-hez tartozó magassága a legnagyobb, azaz M legtávolabb van BF-től. Legyen az e egyenes az AB ívnek BF-fel párhuzamos érintője, és ezen az érintési pont M_1. Ekkor az ellipszisnek csak e egyik partján van pontja, azon, amelyiken B is van. Másrészt a BF és e egyenesek közti síksáv minden pontja legföljebb akkora távolságra van BF-től, mint e, illetve maga az M_1 pont.

1984-11-375-1.eps

Az AB ellipszisív teljes egészében a síksávban van, illetve M_1 és B a sávot határoló e, ill. FB egyenesen, ezért *éppen M_1 a keresett pont,* vagyis az *ellipszis BF-fel párhuzamos érintői közül az F-hez közelebbinek az érintési pontja.*

b) Ha helyzet szerint adottnak vesszük az A, B, F pontokat, akkor meg is szerkeszthetjük M-et, felhasználva azt, hogy az ellipszis legismertebb („vezérsugaras") definíciója egyenértékű a következővel. Ha adott a $2a$ hosszúság és az F, F_1 pontok, amelyekre $FF_1 < 2a$, akkor az ellipszis azon körök középpontjainak mértani helye (tetszőleges, az FF_1 egyenesen átmenő síkban), amelyek érintik az F_1 körüli, $2a$ sugarú k kört, és átmennek az F ponton (belső érintkezés, ui. F a k belsejében van).

Valóban, ha a P középpontú k' kör átmegy F-en, és E-ben érinti k-t, akkor E az F_1P szakasz P-n túli meghosszabbításán van, és $PE = PF$ miatt $PF_1 + P = F_1E = 2a$, állandó. (E-n az ábra E^* pontja értendő.)

A k-n tetszőlegesen megválasztott E ponthoz tartozó P-t az FE szakasz m felező merőlegese metszi ki F_1E-ből. Továbbá m éppen az ellipszis P-beli érintője, mert a P-től különböző bármely Q pontjára is fennáll $QE = QF$, de ekkor a QF_1E valódi háromszög révén

$$QF_1 + QF = QF_1 + QE > F_1E = 2a,$$

tehát Q az ellipszisre nézve külső pont.

A mi esetünkben m iránya az adott, párhuzamosnak akarjuk BF-fel, következésképpen FE-t merőlegesen kell felvennünk BF-re. A szerkesztés tehát a következő: az AF egyenesre merőlegesen vetítjük B-t, – ekkor az O vetületre az adott pontok definíciója alapján $OA = FB = a$ –, F-nek O-ra való F_1 tükörképe körül megrajzoljuk k-t, és ezt metsszük az F-ben FB-re állított merőlegessel E-ben (ez az F-hez közelebbi metszéspont), ebből a föntiek szerint kapjuk M-et.

Megjegyzések. 1. Megszerkeszthető M abból is, hogy az ellipszis az O körüli, OA sugarú körnek a képe abban a merőleges affinitásban, amelynek tengelye az OA egyenes, és B annak a B^* pontnak a megfelelője, amelyre $OB^* \perp OA$ és $OB^* = OA$. Ekkor FB megfelelője a kör rendszerében az FB^* egyenes, és – mivel az affinitás párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe visz át –, úgy jutunk közelebb célunkhoz, hogy megszerkesztjük a körhöz az FB^*-gal párhuzamos érintőt. Pontosabban mondva: elég gondolni erre az érintőre, hiszen nekünk elég az M^* érintési pontja, ezt pedig kimetszi (a körből) az O-ból FB^*-re állított merőleges, természetesen az F-hez közelebbi metszéspontot véve. Végül M az M^* megfelelője az ellipszis rendszerében (vagyis pl. B^*M^* és BM az AF egyenesen metszik egymást).

1984-11-376-1.eps

2. Többen koordinátageometriai segítséggel határozták meg M-et abból, hogy – az ellipszis szokásos elhelyezése és betűzése mellett – a BF egyenes iránytangense $(-b/c)$. Az ellipszis „felső” ívének egyenlete $y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$, érintőjének iránytangense deriválással

$$-\frac{bx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\text{hacsak}\, x \neq \pm\, a).$$

A kettő egyenlő, ha $x/a = a/\sqrt{a^2 + c^2}$.

A szerkesztés: elfordítjuk derékszöggel F-et O körül G-be, a GA félegyenesre rámérjük a $GH = a = BF$ szakaszt, ekkor H abszcisszája megadja M abszcisszáját. (A „2-körös eljárással” kaphatjuk M-et.)