A legkisebb közös többszöröst a szóban forgó számok [ ]-be foglalt felsorolásával jelöljük.

Jelölje M a pozitív egész számok halmazát. Ha $b_1 = 1$, akkor az állítás nyilván igaz $(1|[b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n])$. Ha $b_1 \geqq 2$, akkor vagy a b_1-gyel osztható, vagy pedig a b_1-gyel osztva 1 maradékot adó számok teljesen kimaradnak az A_1-ből, hiszen A_1 minden eleme ugyanannyi maradékot ad b_1-gyel osztva. Az $M \diagdown A_1$ halmaznak tehát végtelen sok eleme van.

Tekintsük most a *legnagyobb* olyan j-t, amelyre $M \diagdown (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j)$ végtelen halmaz. Mivel a feltétel szerint $M \diagdown (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ üres, tehát ilyen j létezik, $j < n$ és $M \diagdown (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{j+1})$ véges.

Memutatjuk, hogy $b_{j+1}|[b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_j]$. Ebből az állítás már következik, hisz $[b_1,\ \ldots,\ b_j]|[b_1,\ \ldots,\ b_j, b_{j+2},\ \ldots,\ b_n]$.

A j megválasztása miatt végtelen sok olyan A_{j+1}-beli szám van, amelyik nem eleme az $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j$ halmaznak. Ha x egy ilyen szám, akkor azt állítjuk, hogy$x-b$ sem eleme $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j$-nek, ahol $b = [b_1, b_2, \ldots, b_j]$. Ha ugyanis $(x-b) \in A_i$ volna valamilyen $1 \leqq i \leqq j$-re, akkor $(x-b) + (b/b_i) \cdot b_i = x$ is A_i-beli volna, hiszen az A_i egy b_i differenciájú számtani sorozat, b/b_i pedig pozitív egész.

Azt kaptuk tehát, hogy végtelen sok olyan A_{j+1}-beli x szám van, amelyre $x - b \notin A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j$. Másfelől az $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{j+1}$ halmazban csak véges sok természetes szám nincs ott, a talált végtelen sok $x-b$ alakú szám között így van olyan – végtelen sok –, amelyik benne van ebben a halmazban. Mivel pedig láttuk, hogy az első j halmaz uniójában nincs benne, ezért valamennyi ilyen számnak az A_{j+1}-ben kell lennie.

Van tehát – mégpedig végtelen sok, de erre nincs szükség – olyan A_{j+1}-beli x, amelyre $x - b \in A_{j+1}$ is igaz. Ebből viszont már következik az állítás, hiszen az A_{j+1} számtani sorozat bármely két elemének különbsége osztható a sorozat differenciájával, b_{j+1}-gyel.

Megjegyzések. 1. A feladatban leírt tulajdonságokkal rendelkező halmazrendszereket *véges fedőrendszer*eknek nevezik, és igen sok a velük kapcsolatos megoldatlan probléma. Nem ismeretes például, hogy létezik- e olyan véges fedőrendszer, ahol a differenciák egymástól és 1-től különböző páratlan számok. Azt sem tudjuk még, hogy igaz-e az a – feladatunkénál jóval erősebb – állítás, miszerint egy véges fedőrendszerben mindig van olyan differencia, amelyik egy másiknak osztója.

2. Ha a szóban forgó sorozatokról még azt is föltesszük, hogy semelyik kettőnek nincs közös eleme, akkor jóval többet állíthatunk: azt, hogy a differenciák közt vannak egyenlők. A bizonyításhoz a számelmélet egy jól ismert, bár első találkozáskor kétségkívül meghökkentő eszközének, a komplex változós függvényeknek néhány elemi tulajdonságára van szükség. Az alábbiakban vázoljuk a fenti állítás bizonyítását.

Tegyük fel, hogy a természetes számokat – ez nem lényeges különbség – sikerült felbontanunk véges sok – mondjuk k darab – közös elem nélküli végtelen számtani sorozat egyesítésére. Legyenek ezek az $\{a_i + n \cdot b_i\}$ alakú sorozatok $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \ldots,\ k,\ n \in \mathbf{N})$.

Tekintsük az alábbi végtelen mértani sort:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots$$

Könnyen igazolható, hogy a fenti sor komplex számok körében is minden $|z| < 1$-re konvergens és összege $\dfrac{1}{1-z}$.

Mivel a kitevők éppen a természetes számok, a fenti összeg tagjait átrendezhetjük a feltételezésünk szerint létező felbontásnak megfelelően k darab végtelen mértani sorrá. Amit felhasználunk még, az az, hogy ez az átrendezés a sor összegén – jelen esetben – nem változtat. Így tehát – felhasználva, hogy az egyes mértani sorok összege $\dfrac{z^{a_i}}{1-z^{b_i}}$, ha $|z| < 1$, az átrendezhetőség miatt

$$(*) \qquad \frac{1}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{b_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{b_2}} + \ldots + \frac{z^{a_k}}{1-z^{b_k}},$$

ha $|z| < 1$.

Ha a b_i-k különbözők, akkor legyen $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ és legyen ε egy primitív b_k-adik egységgyök – így $\varepsilon^{b_k} = 1$ és $\varepsilon^{b_i} \neq 1$, ha $i < k$. Ha most $z \to \varepsilon$ úgy, hogy eközben $|z| < 1$, akkor a bal oldal, illetve a jobb oldal első $k-1$ tagja korlátos, az utolsó, k-adik tag viszont nem az, a $(*)$ egyenlőség tehát nem állhat fenn minden $|z| < 1$-re. A kapott ellentmondásból következik, hogy a differenciák között vannak egyenlők, sőt az is kiderül, hogy a differenciák maximuma legalább kétszer fordul elő.