Jelöljük a középső, $(n+1)$-edik természetes számot a-val. Ekkor a vizsgálandó négyzetösszeg

$$S_n = (a-n)^2 + \big(a-(n-1)\big)^2 + \dots + a^2 + \dots + \big(a+(n-1)\big)^2 + (a+n)^2 = \\ = (2n+1)a^2 + 2(1^2+2^2+\dots+n^2).$$

Tehát

$$\begin{aligned} n=1 \text{ esetén} \qquad & S_1 = 3a^2+2, \\ n=2 \text{ esetén} \qquad & S_2 = 5a^2+10 = 5(a^2+2), \\ n=3 \text{ esetén} \qquad & S_3 = 7a^2+28 = 7(a^2+4), \\ n=4 \text{ esetén} \qquad & S_4 = 9a^2+60 = 9(a^2+6)+6. \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ esetén S_n nem lehet négyzetszám. Ehhez először azt vizsgáljuk meg, hogy a négyzetszámok 3, 5, 7 és 9-cel osztva milyen maradékot adhatnak. Ha egy m szám k-val osztva r maradékot ad, akkor m^2 és r^2 is ugyanezt a maradékot adja. Valóban, $m^2-r^2=(m-r)(m+r)$ osztható k-val, hiszen $k/m-r$. Ennek alapján könnyen látható, hogy a négyzetszámok 3-mal osztva 0 vagy 1; 5-tel osztva 0, 1 vagy 4; 7-tel osztva 0, 1, 2 vagy 4; 9-cel osztva 0, 1, 4 vagy 7 maradékot adhatnak.

Visszatérve az S_n számok vizsgálatára, S_1 3-mal osztva 2 maradékot ad, így nem lehet négyzetszám, S_2 5-tel osztható, de 25-tel nem, hiszen a^2 ötös maradéka nem lehet 3. Így S_2 nem lehet négyzetszám, mert a négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prímszám páros kitevőjű hatványon szerepel. Hasonlóan S_3 7-tel osztható, de 49-cel nem, mert a^2+4 nem osztható 7-tel. Végül S_4 sem négyzetszám, mert kilences maradéka 6.

Megjegyzések. 1. Többen észrevették, hogy $n=5$ esetén a helyzet változik: $18^2+19^2+\dots+28^2=77^2$, tehát van 11 egymást követő természetes szám úgy, hogy négyzetösszegük négyzetszám.

2. Nehéz kérdésnek látszik, hogy általában milyen n-ekre található $(2n+1)$ egymást követő természetes szám, melyek négyzetösszege négyzetszám.