Először belátjuk a következőt. Ha 4 pont úgy helyezkedik el a síkon, hogy 1 közülük a másik 3 által meghatározott háromszög belsejében van, akkor a 4 pontból kiválasztható két ponthármas, amelyek által meghatározott két háromszögben a legkisebb szög különböző. (Legkisebb szögről itt abban az értelemben a beszélünk, hogy a szóban forgó szögnél nincs kisebb szöge a háromszögnek.)

Ha ugyanis $D$ az $ABC$ háromszög belső pontja, és $BAC\sphericalangle=\alpha$ az $ABC$ háromszög legkisebb szöge (1. ábra), akkor pl. az $ABD$ háromszög legkisebb szöge biztosan kisebb $\alpha$-nál. Jelölje $\varepsilon$ az $ABD$ háromszög legkisebb szögét. Egyrészt $\varepsilon \leqq BAD\sphericalangle$, másrészt $BAD\sphericalangle < BAC\sphericalangle$, ezért $\varepsilon<\alpha$.

1984-10-306-2.eps

*1. ábra*

Mármost ha a 6 adott pont konvex burka háromszög, négyszög vagy ötszög, mindig található az előbbi tulajdonsággal rendelkező pontnégyes. Minthogy semelyik 3 pont sincs egy egyenesen, a konvex burok belsejében is található pont. Azt, hogy egy belső pont valamelyik ponthármas által meghatározott háromszögbelső pontja is egyben, biztosítja, hogy semelyik 3 pont nem esik egy egyenesre.

Ezekben az esetekben tehát a feladat állítása bizonyított.

1984-10-306-3.eps

*2. ábra*

Ha a 6 megadott pont konvex burka hatszög (2. ábra), akkor válasszuk ki a hatszögnek minden második csúcsát, pl. $A$-t, $C$-t és $E$-t. Az $ACE$ háromszög legkisebb szöge legyen mondjuk a $CAE\sphericalangle$. Mivel $CAD\sphericalangle < CAE\sphericalangle$, az $ACD$ háromszög legkisebb szöge kisebb az $ACE$ háromszög legkisebb szögénél.

Ezzel a feladat állítását minden lehetséges esetre bebizonyítottuk.

*Megjegyzés.* 1. A fenti megoldás gondolatmenetét alkalmazva a következő erősebb állítás is belátható: Ha öt pont közül semelyik három nincs egy egyenesen, s bármely három által meghatározott háromszögben ugyanakkora a legkisebb szög, akkor az öt pont szabályos ötszöget alkot. Ebből a feladat állítása következik, hiszen hat pont közül nem alkothat bármelyik öt szabályos ötszöget.

2. A szabályos hatszög bármely három csúcsa és a kimaradó három csúcs egymással egybevágó háromszöget alkot. A feladat szövegéből tehát nem hagyható el a „nem feltételenül diszjunkt” feltétel.

3. A szabályos nyolcszög csúcsai közül bármely három által alkotott háromszögben 22,5°-os vagy 45°-os a legkisebb szög. Nyílt kérdés azonban, hogy kilenc pont közül kiválasztható-e mindig három olyan (nem feltétlenül diszjunkt) ponthármas, amelyek által alkotott háromszögek legkisebb szöge páronként különböző.