a) Jelöljük a deltoid csúcsait sorra A, B, C, D betűvel úgy, hogy $AB = AD = b$ és $CB = CD = a$ legyen, az átlók hosszát d-vel, metszéspontjukat M-mel. Feltehetjük, hogy adatainkra $b \geqq a$ teljesül.

1984-10-304-1.eps

Eleve gondolunk konvex és konkáv megoldás lehetőségére. Az MBA és MBC derékszögű háromszögek alapján $AC = |AM \pm MC|$, azaz

$$2AC = 2d = \left|\sqrt{4b^2 - d^2} \pm \sqrt{4a^2 - d^2}\right|.$$

Kétszeri négyzetre emelés – és köztük átrendezés – alapján d^2-re kapunk másodfokú egyenletet:

(1) $$3d^2 - 2(a^2 + b^2) = \pm\sqrt{(4b^2 - d^2)(4a^2 - d^2)},$$

(2) $$d^4 - (a^2 + b^2)d^2 + \frac{1}{2}(b^2 - a^2)^2 = 0.$$

Valós d^2 értéket kapunk, ha a diszkriminánsra

$$(a^2 + b^2)^2 - 2(b^2 - a^2)^2 = 6a^2b^2 - a^4 - b^4 = -a^4\left(\left(\frac{b}{a}\right)^4 - 6\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1\right) \geqq 0.$$

Ez $b = a$ (> 0) esetén mindenesetre teljesül: $4b^4 > 0$, és $(b/a)^2$ felső korlátját az

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

(reciprok) egyenlet nagyobbik gyöke adja: $x_2 = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$. Így a megoldás feltétele

(3) $$1 \leqq \frac{b}{a} \leqq \sqrt{2} + 1,$$

ugyanis az biztos, hogy a föltétel teljesülése esetén d^2-re nem negatív értékeket kapunk, hiszen (2)-ben d^2 együtthatója negatív, a d^2-et nem tartalmazó tag pedig pozitív.

Ha (3)-ban $b/a = 1$, akkor geometriailag csak a $d^2 = a^2 + b^2 = 2b^2$ megoldás használható (négyzet), mert a $d = 0$ megoldás elfajult négyszöget jelent. Akkor is csak 1 deltoidot kapunk, ha $b/a = \sqrt{2} + 1$, ekkor (2) gyökei egyenlők. Általában

$$2d_1^2 = a^2 + b^2 + a^2\sqrt{-\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \lambda^2\right]\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}\right]} =$$

$$= a^2 + b^2 + \frac{1}{\lambda}\sqrt{(\lambda a + b)(\lambda a - b)(\lambda b + a)(\lambda b - a)},$$

ahol $\lambda = \sqrt{2} + 1$, és $2d_2$ kifejezésében a négyzetgyök (-1)-szerese szerepel.

b) Valós, nem elfajult megoldás esetén a $BAD\sphericalangle = \alpha$-ra és $ABC\sphericalangle = \beta$-ra a cosinustétel alapján, mindkét d-értékkel

$$\cos\alpha = \frac{1}{2b^2}(2b^2 - d^2), \qquad \alpha = \text{arc } \cos\left(1 - \frac{d^2}{2b^2}\right),$$

$$\cos\ \beta = \frac{1}{2ab}(a^2 + b^2 - d^2), \qquad \beta = \text{arc } \cos\frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab},$$

és ezekből a C csúcsnál levő szög

$$\gamma = 2\pi - (\alpha + 2\beta).$$

A $\gamma = \pi$ eset tulajdonképpen szintén elfajult deltoid. Előre látható, hogy szükségképpen ez áll be, ha $d = 2a$, ekkor (1) mindkét oldala 0, és $b = \sqrt{5}a$. Meg lehet mutatni, hogy a $b/a = \sqrt{5}$ eset úgy vágja ketté a (3) intervallum belsejét, hogy $b/a < \sqrt{5}$ esetén d_1 konvex négyszöget eredményez, d_2 konkávot; ha pedig

$$\sqrt{5} < b/a < \sqrt{2}+1,$$

akkor mindkét deltoidunk konkáv a C csúcsánál, ahol a kisebb $BC = DC = a$ szárai összefutnak.

Megjegyzés. Bizonyára több megoldó észrevette, hogy feladatunk a múlt tanévi Gy. 2045. gyakorlat *számító* megoldása; ott az oldalakból *szerkesztenünk* kellett a deltoidot, tudva, hogy $AC = BD$. (Lásd a megoldást az 1983. decemberi számban, 206. old.) Az ottani megoldás a CA átlónak a merőleges BD helyzetbe való forgatásán alapul. Természetesen lép be a diszkusszióba a $\sqrt{2}$ szám: $CE = \sqrt{2}b$, ami nálunk kerülő úton, szerencsés észrevétellel érkezett be.

1984-10-306-1.eps

E meglátás alapján a gépies Pitagorasz-tétel helyett más, közvetett megoldások is kínálkoznak. Például a $D_1EC\sphericalangle = D_2EC\sphericalangle = \varepsilon$ felhasználásával:

$$\cos\ \varepsilon = \frac{a^2+b^2}{2\sqrt{2}ab},$$
$$BD^2 = d^2 = a^2+b^2-2ab\ \cos\ (\varepsilon \pm 45^\circ).$$

Lényegében ugyanígy használható segédszögnek a $D_1CE\sphericalangle$ is.

Ott végül is a $\sqrt{2}-1 \leqq a/b \leqq 1$ feltételhez jutottunk, az elfajult eseteket nem emeltük ki.