Jelöléseink: az α, β, γ nagyságú szög csúcsai rendre A, B, C, a szemben fekvő oldalak hossza rendre a, b, c, ezek felező merőlegese rendre f_a, f_b, f_c, az S pontnak ezekre való tükörképe rendre S_a, S_b, S_c.

Bármelyik két tükörkép átfordítható egymásba az illető két tükörtengely metszéspontja körüli forgatással. Elég ezt pl. az S_a, S_b képpárra belátni. Felhasználjuk, hogy két nem párhuzamos tengelyen való, egymás utáni tükrözés eredménye (a síkban) az a forgatás, melynek középpontja a tengelyek közös pontja, szöge 2-szer akkora, mint amekkora elfordítás szükséges az elsőként használt tengelynek a másodikba való átviteléhez, és hogy e két elfordítás iránya egyező.

Az f_a, f_b tengelypár közös pontja az ABC háromszög köré írt kör O középpontja. S_a az f_a-n tükrözve S-be jut vissza, onnan S_b-be az f_b-n való tükrözés útján, tehát az $S_aOS_b\sphericalangle = \varphi$ forgásszög 2-szer akkora, mint az f_a-t f_b-be vivő forgásszög. Az utóbbi pedig akkora, mint az a oldalegyenest b-be átvivő forgás, hiszen a $BC = a$ egyenes merőleges f_a-ra és az $AC = b$ egyenes merőleges f_b-re. Az a, b egyenespár közös pontja a C csúcs, tehát $\varphi = 2 \cdot BCA\sphericalangle = 2\gamma$.

Mivel pedig O-n f_c is átmegy, azért ugyanígy $S_bOS_c = 2 \cdot CAB\sphericalangle = 2\alpha$ és $S_cOS_a\sphericalangle = 2 \cdot ABC\sphericalangle = 2\beta$; továbbá O képe önmaga, tehát a tükörképek rajta vannak az O körüli, OS sugarú körön. Ekkor pedig a középponti és a kerületi szögek közti összefüggés szerint $S_aS_cS_b\sphericalangle = \varphi/2 = \gamma$, ugyanígy $S_bS_aS_c\sphericalangle = \alpha$, $S_cS_bS_a\sphericalangle = \beta$. Így a szögek egyezése folytán az $S_aS_bS_c$ háromszög valóban hasonló az ABC háromszöghöz.

Mindeddig nem használtuk fel, hogy S a súlypont, ennélfogva az állítás első fele a sík tetszőleges pontjára érvényes, hacsak a háromszög létezik, vagyis S_a, S_b, S_c különböző pontok, más szóval a kiindulási S pont legföljebb egy felező merőlegesen van rajta. Ez a feltétel bármely háromszögben csak a körülírt kör középpontjára nem teljesül.

Másrészt azt is tüstént látjuk, hogy szabályos háromszög esetében az állításnak nincs tartalma; különben ekkor az (1) kifejezés értéke is 0.

A tétel általános jellegére tekintettel hozzátesszük a forgási irányok fönt idézett egyezésének jelentését. Láttuk, hogy az irányt is figyelembe véve $S_aOS_b\sphericalangle =$
$= BOA\sphericalangle$, eszerint az S_a, S_b, S_c pontok forgási iránya ellentétes irányú az ABC pontok irányával a körülírt körük közös O középpontja körül; rövidebben: az $S_aS_bS_c$ háromszög körüljárási iránya ellentétes az ABC háromszögével.

b) A tükörképek alkotta háromszög és az eredeti háromszög hasonlósági arányát mindig megadja a köréjük írt körök sugarainak aránya, vagyis $OS : r$, ahol r az ABC háromszög köré írt kör sugara. Most ezt fejezzük ki a szögekkel, kihasználva, hogy S az ABC háromszög súlypontja.

Jelöljük az O-ból mint kezdőpontból az A, B, C csúcsokba mutató, r hosszúságú helyvektorokat **a**-val, **b**-vel, **c**-vel. Ekkor a súlypont helyvektora:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}), \qquad \text{tehát}$$
$$\frac{OS^2}{r^2} = \frac{1}{9r^2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 = \frac{1}{9r^2}\big(\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2(\mathbf{ab}+\mathbf{bc}+\mathbf{ca})\big).$$

Az **a, b, c** vektorok párjai által bezárt szögek fentiek szerint rendre 2γ, 2α, 2β, így

$$\mathbf{ab} = r^2\cos 2\gamma, \qquad \mathbf{bc} = r^2\cos 2\alpha, \qquad \mathbf{ca} = r^2\cos 2\beta.$$
$$\frac{OS^2}{r^2} = \frac{1}{9r^2}\big(3r^2 + 2r^2\big(\cos 2\gamma + \cos 2\alpha + \cos 2\beta\big)\big) = \frac{1}{9}\Big(1 - 2\big(-1 + \cos(180^\circ - 2\alpha) + $$
$$+ \cos(180^\circ - 2\beta) + \cos(180^\circ - 2\gamma)\big)\Big).$$

A $-1 = \cos 180^\circ$ és $180^\circ = \alpha+\beta+\gamma$ helyettesítést elvégezve és a

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$$

azonosságot ismételten alkalmazva

$$9 \cdot \frac{OS^2}{r^2} = 1 - 2\big(\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\alpha+\gamma-\beta) + \cos(\alpha-\gamma+\beta)\big) =$$
$$= 1 - 4\big(\cos\alpha\,\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha\,\cos(\beta-\gamma)\big) = 1 - 8\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma.$$

Ezzel az állítás második részét is igazoltuk.

Eredményünkből speciálisan az is kiadódik, hogy $1 - 8\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma$ nem negatív, vagyis minden háromszögben

$$\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma \le \frac{1}{8},$$

és egyenlőség csak $OS = 0$ esetben áll, vagyis ha a háromszög szabályos.

c) Az állítás második része sem egyedül a súlypontra érvényes, hanem az O körüli, OS sugarú kör minden pontjára, hiszen a hasonlósági arányban csak az OS távolság szerepel, még ha a kiszámításában valóban a súlypontra támaszkodtunk is.

Megjegyzés. Mivel az ABC és $S_aS_bS_c$ hasonló háromszögek körüljárása ellentétes, azért általában *nincs* a síkon olyan pont, amely körül alkalmas forgatva nyújtással egymásba transzformálhatók volnának. (Más kérdés, hogy ha pl. $AB = AC \neq BC$, akkor az $S_aS_bS_c$–ABC háromszögpárnak van hasonlósági centruma.)