I. megoldás. Ha m és n adott pozitív egészek, x adott szakasz, akkor hasonló háromszögek segítségével $\frac{m}{n}\cdot x$ könnyen szerkeszthető. Például két, közös A pontból induló félegyenes egyikére felmérjük az $AB=mx$ szakaszt, a másikra egy tetszőleges AC_0 szakasz n-szeresét, AC-t. A C_0 ponton keresztül a CB egyenessel húzott párhuzamos az AB szakaszból éppen az $AB_0=\frac{m}{n}\cdot x$ hosszú szakaszt metszi ki (1. ábra).

1984-11-366-1.eps

1. ábra

1984-11-366-2.eps

2. ábra

Legyen most r tetszőleges pozitív racionális szám. $\sqrt{r}\cdot x$ egy olyan derékszögű háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága, amelynek átfogóját a magasság éppen rx és x hosszú szakaszokra osztja (2. ábra). A $\sqrt{r}\cdot x$ ennek alapján például a következőképpen szerkeszthető: az $(r+1)x$ hosszúságú szakasz fölé Thalesz-kört rajzolunk, majd az átmérő végpontjától x távolságra merőleges félegyenest állítunk. A félegyenes a kört éppen $\sqrt{r}x$ távolságra metszi. A feladat olyan y és z hosszúságú szakaszok szerkesztését kívánja, amelyekre $y^3+z^3=x^3$. Legyen

$$y+z=t\cdot x. \tag{1}$$

Ezzel a jelöléssel az $x^3=y^3+z^3=(y+z)(y^2-yz+z^2)$ a következőképpen írható:

$$y^2-yz+z^2=\frac{x^2}{t}. \tag{2}$$

Emeljük (1)-et négyzetre, vonjuk ki belőle (2)-t, osszunk 3-mal, majd vonjunk gyököt:

$$\sqrt{yz}=x\sqrt{\frac{t^2}{3}-\frac{1}{3t}}. \tag{3}$$

Nyilvánvaló, hogy (3)-ból és (1)-ből (2) következik, (1) és (2)-ből pedig $x^3=$
$=y^3+z^3$. Elég tehát olyan y és z hosszúságú szakaszokat szerkeszteni, amelyekre (1) és (3) fennáll. Ha t pozitív racionális szám és

$$\frac{t^2}{3}-\frac{1}{3t}>0, \quad \text{azaz} \quad t>1,$$

akkor a megoldás elején mondottak szerint $t\cdot x$ és $x\cdot\sqrt{t^2/3-1/(3t)}$ hosszúságú szakaszt tudunk szerkeszteni. Az $y+z=tx$ átfogójú, $\sqrt{yz}$ magasságú ABC derékszögű háromszög C csúcsának vetülete az AB átfogót éppen a keresett y és z hosszúságú szakaszokra osztja.

Ha tehát $t>1$, akkor a következő szerkesztés megfelelő y és z szakaszokat szolgáltat: megszerkesztjük az $AB=tx$ hosszúságú szakaszt és fölé a Thalész-kört. Az AB egyenestől $x\sqrt{t^2/3-1/(3t)}$ távolságra futó e egyenest a megoldás elején mondottak alapján tudunk szerkeszteni. Ha e metszi a Thalész-kört, akkor a metszéspontok megfelelnek C-nek. Ezek AB-re eső merőleges vetületei az átfogót olyan AD és DB szakaszokra osztják, melyek hosszára (1) és (3) fennáll, és éppen ilyen szakaszokat kerestünk (3. ábra).

1984-11-366-3.eps

3. ábra

Azt kell még megállapítanunk, választható-e t úgy, hogy e messe a Thalész-kört. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $x\sqrt{t^2/3-1/(3t)}$ távolság nem haladhatja meg a tx átmérő felét, azaz fenn kell állnia a következő egyenlőtlenségnek:

$$\sqrt{\frac{t^2}{3}-\frac{1}{3t}}\le\frac{t}{2}, \quad \text{vagyis} \quad t^3\le 4.$$

Szerkesztésünk tehát tetszőleges $1<t\sqrt[3]{4}$ racionális számból elvégezve megoldáshoz vezet, így pl. $t=3/2$ esetén is: ekkor $AB=3x/2$ és $CD=\sqrt{19}x/6$.

II. megoldás. Az előző megoldás elején mondottak szerint tetszőleges pozitív a,b racionális számokra az $(a+\sqrt{b})x$ és $(a-\sqrt{b})x$ szakaszokat meg tudjuk szerkeszteni, feltéve hogy

$$a>\sqrt{b}, \quad \text{azaz} \quad a^2>b>0 \quad \text{és} \quad a>0. \tag{4}$$

Keressük most y-t és z-t ilyen alakban. (Megjegyezzük, hogy az előző megoldás is ilyen alakú y és z-hez vezet.) Ekkor

$$y^3 + z^3 = \left((a+\sqrt{b})^3 + (a-\sqrt{b})^3\right)x^3 = (2a^3 + 6ab)x^3. \tag{5}$$

a és b tehát pontosan akkor felel meg, ha $2a^3 + 6ab = 1$, vagyis ha

$$b = \frac{1-2a^3}{6a}. \tag{6}$$

(4) és (6) összevetéséből $a^2 > (1-2a^3)/(6a) > 0$, azaz $\frac{1}{2} < a < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ adódik. Válasszuk tehát az a racionális számot $1/2$ és $1/\sqrt[3]{2}$ között tetszőlegesen. Ekkor $b = \frac{1-2a^3}{6a} > 0$, b racionális és persze $a - \sqrt{b} > 0$. Így az $y = (a+\sqrt{b})x$ és a $z = (a-\sqrt{b})x$ hosszúságú szakaszokat meg tudjuk szerkeszteni, y és z-re (5) és (6) alapján $y^3 + z^3 = x^3$ teljesül, a feladatot megoldottuk. a választható például 2/3-nak.

III. megoldás. Az y-t és a z-t ezúttal $y = x\sin\alpha$, $z = x\sin\beta$ alakban keressük, ahol α, β szerkeszthető szögek. Az $x^3 = y^3 + z^3$ feltétel ekkor $\sin 3\alpha =$
$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ alapján így írható:

$$1 = \sin^3\alpha + \sin^3\beta = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha + 3\sin\beta - \sin 3\beta}{4} = \frac{3}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} -$$
$$-\frac{1}{2}\sin\frac{3\alpha+3\beta}{2}\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2} = 1.$$

Vegyük észre, hogy ha $\alpha + \beta = 120^\circ$, akkor $\sin\frac{3\alpha+3\beta}{2} = 0$ és $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A fenti egyenlőség tehát így alakul:

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1,$$

azaz

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}. \tag{7}$$

A 4 egység befogójú és $3\sqrt{3} > 4$ átfogójú derékszögű háromszögnek a 4 hosszúságú befogója mellett fekvő szöge éppen a $\frac{\alpha-\beta}{2}$, ami kisebb 60°-nál. Másrészt $\frac{\alpha+\beta}{2} = 60^\circ$ a feltevésünk szerint, így α-t, β-t meg tudjuk szerkeszteni, és ebből a pozitív $y = x\sin\alpha$ és $z = x\sin\beta$ is szerkeszthető. A fenti számolást (7)-ből kiindulva visszafelé is elvégezhetjük, s ahhoz jutunk, hogy a szerkesztett szögekre $\sin^3\alpha + \sin^3\beta = 1$, vagyis $y^3 + z^3 = x^3$, ahogy a feladat kívánta.

Megjegyzés. Többen észrevették, hogy a feladatnak köze van az ún. *déloszi problémához*, mely azt a feladatot tűzte a görögök elé, hogy szerkesszenek olyan kockát, amelynek térfogata kétszerese egy adott kocka térfogatának. Sok szellemes kísérlet után csak a 19. század végén sikerült bizonyítani, hogy körzővel és vonalzóval ilyen kocka éle nem szerkeszthető. A mi feladatunk nyelvén ez azt jelenti, hogy $y = z$ feltevéssel a feladatot nem lehet megoldani. Az I. megoldás bizonyos értelemben az összes szóba jövő ($y \neq z$) megoldást megadja: ha t olyan szám, amelyre tx szerkeszthető és $1 < t < \sqrt[3]{4}$, akkor (1) és (3) megoldható és a megoldás szerkeszthető. Ezt még könnyű bizonyítani, de azt már nem könnyű megmondani, milyen t számokra szerkeszthető a tx hosszúság. (Erről bővebbet lásd a KöMal 14. kötet (1957) 4–5. számaiban a 97–107. és 129–134. oldalakon, *Surányi János:* A szögharmadolás kérdéséről c. cikkében.)

Megjegyezzük még, hogy egyes tudósok szerint a déloszi probléma felvetése a déloszi jósdánál működő görög papok (talán szándékos) félreértése volt. Vallási szokás volt ugyanis bizonyos járványok idején a (kocka alakú) oltárt olyan kockára bővíteni, amelynek *alapterülete* az eredeti kocka *alapterületének* kétszerese.