Az a) tulajdonság szerint bármely x, y, z számra $x*(y*z)=(x*y)*z$. A *b)* tulajdonságból $(x*y)*z=(y*z)*x$, e kettőből pedig

$$x*(y*z)=(y*z)*x. \qquad d)$$

Ez minden x, y, z-re már „majdnem" a bizonyítandó állítás (lásd a 3. megjegyzést), csakhogy eszerint a $*$ olyan elemeken cserélhető fel, amik közül legalább az egyik a $*$ művelet eredménye. (A *d)*-ből úgy sem következik a kívánt állítás, hogy z helyére x-et írunk, és felhasználjuk rá *a)*-t: $(x*y)*x=(y*x)*x$, majd egyszerűsítünk x-szel, lásd a 2. megjegyzést).

Tegyük fel, hogy az állítás nem volna igaz, azaz volna olyan x és y, amire

$$x*y\neq y*x,$$

Ekkor a *c)* tulajdonság felhasználásával van olyan u, hogy

$$u*(x*y)\neq u*(y*x),$$

és ekkor ismét a *c)* tulajdonság felhasználásával van olyan v is, hogy

(1) $$v*\big(u*(x*y)\big)\neq v*\big(u*(y*x)\big),$$

ez viszont már nem lehet! Ugyanis az $(x*y)$-t egyetlen számként kezelve, *a)*-ból

$$v*\big(u*(x*y)\big)=(v*u)*(x*y),$$

és például a $(v*u)$-t egy számként kezelve, a *d)* tulajdonságból

$$(v*u)*(x*y)=(x*y)*(v*u).$$

Tehát (1) bal oldala egyenlő $(x*y)*(v*u)$-val.

Most nézzük (1) jobb oldalát. Az *a)* tulajdonságból

$$v*(u*(y*x))=(v*u)*(y*x),$$

a $(v*u)$-t egy számnak tekintve, ismét az *a)* tulajdonságból

$$(v*u)*(y*x)=((v*u)*y)*x.$$

Az első zárójelben álló kifejezésre a *d)* tulajdonságot használjuk fel:

$$\big((v*u)*y\big)*x=\big(y*(v*u)\big)*x.$$

A $(v*u)$-t a továbbiakban egyetlen számnak tekintjük, és először a *d)*, utána pedig az *a)* tulajdonságot használjuk:

$$\big(y*(v*u)\big)*x=x*\big(y*(v*u)\big)=(x*y)*(v*u).$$

Tehát az (1) egyenlőtlenség jobb oldala is egyenlő $(x*y)*(v*u)$-val. Ellentmondásra jutottunk, tehát valóban minden x és y-ra $x*y=y*x$.

Megjegyzések. 1. Az *a)* tulajdonságból, amit *asszociativitásnak* mondanak, levezethető, hogy több egymás utáni $*$ művelet eredménye nem függ a zárójelezéstől, legfeljebb a tényezők sorrendjétől. Noha ez a bizonyítást leegyszerűsítette volna, a könnyebb érthetőség kedvéért megmaradtunk az *a)* tulajdonság közvetlen felhasználása mellett.

2. Több megoldás felhasználta, hogy ha $a*b=a*c$, akkor $b=c$ („egyszerűsítési szabály"). De ez nem következik az adott tulajdonságból! Mivel a *c)* nem azt állítja, hogy $x\neq y$ esetén minden z-re $z*x\neq z*y$, hanem azt, hogy ilyen z létezik, csak annyit mondhatunk, hogy ha *minden* z elemre $z*x=z*y$, akkor $x=y$. Könnyen adhatunk példát olyan $*$ műveletre, ami kielégíti az *a)*, *b)*, *c)* tulajdonságokat, és mégsem érvényes rá az egyszerűsítési szabály. Ilyen például a következő: $1*x=x$, $x*1=x$, és ha $x\neq 1$, $y\neq 1$, akkor $x*y=0$. Ennél $2*3=2*4=0$, de persze $3\neq 4$.

3. További probléma, hogy a *d)* tulajdonság már „majdnem" a kívánt állítás. Csakhogy ahhoz, hogy ebből $x*p=p*x$ adódjon, be kellene látni, hogy minden p-hez létezik olyan y és z szám, hogy $p=y*z$, hiszen csak így következne $x*p=x*(y*z)=(y*z)*x=p*x$. De ez, noha a 2. megjegyzésben megadott műveletre és a szorzásra, összeadásra is igaz, általában nem teljesül. Ha például a $*$ műveletet így definiáljuk: $1*x=x*1=10^x$, és $x\neq 1$, $y\neq 1$ esetén $x*y=0$, akkor az *a)*, *b)*, *c)* tulajdonság teljesül, de vannak számok, amik nem állnak elő $y*z$ alakban, nevezetesen a negatívok.

4. Mint látható, az összeadás és szorzás műveleteken kívül sok más is van, ami az *a), b), c)* tulajdonságokkal bír. Tehát nem igaz, amit sok megoldás feltételezett, hogy a $*$ művelet a $+$ vagy a $\cdot$ művelettel egyezik meg.