1. A test vizsgálatában az ábra szerinti betűzést használjuk: az ötélű, nem szomszédos csúcsok elöl és hátul A_1 és A_2, valamint balról és jobbról B_1 és B_2, a négyélű csúcsok C_1 és C_2 (fönt), ill. D_1 és D_2 (lent). Valamennyi él hossza e.

1984-09-252-1.eps

A feladat szövege azt sugallja, hogy az A_1A_2 és B_1B_2 távolságok egyenlők, ezeknek a hossza $e+t$. Az ábra azt is sejteti, hogy a C_1C_2 és D_1D_2 élek C, ill. D felezőpontjait összekötő egyenes körüli 180°-os elfordítás mindegyik X_1, X_2 csúcspárt egymásba viszi át ($X=A,B,C,D$). Először ezt bizonyítjuk. (Ezt a tényt számos dolgozat csupán ösztönösen használta fel, vagy csak megemlítette.)

Írjunk e sugarú gömböt A_1 és A_2 körül. Ezeknek a B_1, C_1, C_2 és B_2 csúcsok közös pontjai, tehát rajta vannak a gömbök metszésvonalán, ami pedig egy k kör, síkidom. Más szóval e 4 csúcs S síkja a gömbök A_1A_2 centrálisának felező merőleges síkja. A kör középpontja az A_1A_2 szakasz A felezőpontja, mert A_1A_2 körül forgatva a gömböket, bármely állásban fedik önmagukat, ugyanígy k is.

Ugyanezért egy k' körön, a B_1B_2 szakasz S' felező merőleges síkjában vannak az A_1, D_1, D_2, A_2 csúcsok, és S' merőleges S -re, mert tartalmazza az S-re merőleges A_1A_2 egyenest (és viszont S a B_1B_2-t). A k' kör középpontja a B_1B_2 szakasz B felezőpontja.

Mindegyik említett csúcsnégyes által alkotott húrnégyszög tengelyszimmetrikus trapéz, mert például az utóbbiban $A_1D_1=A_2D_2=e$, emiatt $D_1D_2||A_1A_2$, tehát D_1D_2 is merőleges S-re. Ha belátjuk, hogy e trapézok egybevágók, ez az e-től különböző oldalaik $A_1A_2=B_1B_2$ egyenlőségét jelenti.

Húrtrapéz meghatározásához 3 független méret szükséges; ha ezek két idomban páronként egyeznek, akkor azok egybevágók. Esetünkben a következő 3 adatpár egyenlőségét tudjuk: a 2–2 szár, a „rövidebb” párhuzamos oldalak $C_1C_2=D_1D_2=e$, végül a közös AB szakaszhossz. Az A, B pontok ugyanis fölcserélt szerepet játszanak a két trapézban pl. A az elsőben a körülírt kör középpontja, a másodikban a „hosszabb” párhuzamos oldal felezőpontja. Ezek szerint valóban fennáll az egybevágóság, és $A_1A_2=B_1B_2$, ezt akartuk bizonyítani. (A „rövidebb” és „hosszabb” jelzőket csupán szemléletesség kedvéért használtuk a párhuzamos oldalak egyszerű megkülönböztetése végett.)

Azt is kaptuk, hogy S és S' a testnek szimmetriasíkjai, és mivel merőlegesen állnak, azért metszésvonaluk, CD valóban 180°-os forgástengely.

2. A továbbiakban CD-t függőlegesen tartjuk, ekkor trapézaink alapjai vízszintesek.

Trapézaink magassága

$$AD=BC=\sqrt{B_1C_1^2-\left(\frac{B_1B_2-C_1C_2}{2}\right)^2}=\sqrt{e^2-\frac{t^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4e^2-t^2}.$$

Az A és C pontok magasságkülönbsége:

$$AC=\sqrt{A_1C^2-A_1A^2}=\sqrt{\frac{3e^2}{4}-\left(\frac{e+t}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2e^2-2et-t^2}.$$

E kettő különbsége az AB magasságkülönbség.

Tekintsük azt a téglatestet, melynek egyik testátlója A_1B_2, egy éle AB, 4 lapja függőleges, 2 lapja vízszintes. Ebből

$$A_1B_2^2=e^2=AB^2+AA_1^2+BB_2^2=AB^2+2\left(\frac{e+t}{2}\right)^2,$$

$$4AB^2=(2BC-2AC)^2=\left(\sqrt{4e^2-t^2}-\sqrt{2e^2-2et-t^2}\right)^2=4e^2-2(e+t)^2,$$

$$\sqrt{(2e-t)(2e+t)}\cdot\sqrt{2e^2-2et-t^2}=2e^2+et=e(2e+t).$$

A második négyzetre emelés után mindkét oldalt oszthatjuk $(2e+t)$-vel, és ez nem lehet 0; végül a

$$(2e-t)(2e^2-2et-t^2)=e^2(2e+t)$$

egyenlet rendezésével az állításbeli egyenlethez jutunk.

3. Az $f(t)=0$ egyenlet bal oldala a $(-3e,-2e)$, a $(0,e)$ és a $(2e,3e)$ intervallumok belsejében vált előjelet. Számunkra csak a $(0,e)$ intervallumbeli zérushelynek van jelentősége, hiszen $t>0$, másrészt az $A_1A_2B_2$ háromszögből $e+t<2e$, azaz $t<e$.

A gyököt intervallumfelezéssel, kis számítógéppel számolva határolhatjuk be az előírt pontossággal. $e=1$ mellett

$$f(0{,}289)=+0{,}0011,\ \ f(0{,}29)=-0{,}0056,$$

tehát 2 tizedesre kerekítve $t=0{,}29$ és

$$A_1A_2=B_1B_2=1{,}29 \text{ egység}.$$

4. A test 8 csúcsa közti 28 távolság közül 18 él, azaz egységnyi, a további 10 távolság között a szimmetria alapján 3-féle hosszúság fordul elő, egyik a már látott $e+t$. A további 8 pedig 4-esével egyenlő:

$$\text{trapézátlók:}\quad A_1D_2 = A_2D_1 = B_1C_2 = B_2C_1 = \sqrt{AD^2 + \left(e + \frac{t}{2}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{2e^2 + et} = 1{,}51 \text{ egység}$$

és a $C_1C_2D_1D_2$ (beírt) tetraéder e-től különböző 4 éle, a térbeli Pitagorasz-tétel alkalmazásával

$$\sqrt{(CA + AD)^2 + 2\left(\frac{e}{2}\right)^2} = 1{,}72 \text{ egység.}$$

Megjegyzés. A felhasznált egybevágósági állításhoz hozzátesszük: más kérdés volna a trapézok megszerkesztése. Az $(e+t)$ alap az eukleidészi szabályok szerint *nem szerkeszthető* e és $AB = BC - AC$ ismerete alapján.