I. megoldás. Ismeretes, hogy F_a felezi az ABC háromszög köré írt kör BC ívét, ezért $BF_a = F_aC$. Másrészt az OBF_a háromszög egyenlő szárú, hiszen

$$BOF_a\sphericalangle = BAO\sphericalangle + ABO\sphericalangle = CAF_a\sphericalangle + CBO\sphericalangle =$$
$$= CBF_a\sphericalangle + OBC\sphericalangle = OBF_a\sphericalangle.$$

1984-10-301-1.eps

Az első egyenlőség a háromszög külső szögére vonatkozó tételből következik, a második abból, hogy OA és OB szögfelező. Ezek szerint az OBF_a háromszögben $OF_a = BF_a = CF_a$. Az ABF_aC húrnégyszögre felírható a Ptolemaiosz-tétel, amely szerint a húrnégyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemben fekvő oldalak szorzatának összegével:

$$BF_a \cdot AC + CF_a \cdot AB = AF_a \cdot BC.$$

Ezt BC-vel, majd $OF_a = BF_a = CF_a$-val osztva

$$\frac{AC+AB}{BC} = \frac{AF_a}{OF_a} = \frac{AO}{OF_a} + 1. \tag{2}$$

Okoskodásunkat az F_b és F_c pontokra megismételve kapjuk, hogy

$$\frac{BA+BC}{AC} = \frac{BO}{OF_b} + 1,$$
$$\frac{CA+CB}{AB} = \frac{CO}{OF_c} + 1.$$

Ha e három egyenlőséget összeadjuk, a jobb oldalon (1) bal oldalánál 3-mal nagyobb szám áll. Azt kell tehát csak belátnunk, hogy

$$\frac{AC+AB}{BC} + \frac{BA+BC}{AC} + \frac{CA+CB}{AB} \geqq 6.$$

Ez pedig igaz, hiszen egy pozitív szám és reciprokának összege nem kisebb 2-nél, s itt a bal oldalon három pozitív szám: $\frac{AC}{BC}$, $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AB}$ és reciprokuknak összege áll. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha mindhárom szám 1, azaz a háromszög szabályos.

II. megoldás. A (2) összefüggést bizonyítjuk hasonló háromszögek segítségével. Jelölje C_1 a beírt kör és az AB oldal érintési pontját, F_1 pedig a BC oldal felezőpontját. Ekkor C_1AO és F_1BF_a hasonló derékszögű háromszögek, hiszen – mint az előző megoldásban is láttuk – a két háromszög A-nál, ill. B-nél fekvő szöge megegyezik. A megfelelő oldalak arányára:

$$\frac{AO}{BF_a} = \frac{AC_1}{BF_1} = \frac{2AC_1}{BC}.$$

Ha most felhasználjuk, hogy $BF_a = OF_a$ és $2AC_1 = AB + AC - BC$, akkor egyenlőségünket ilyen alakba írhatjuk:

$$\frac{AO}{OF_a} = \frac{AB+AC-BC}{BC} = \frac{AB+AC}{BC} - 1,$$

amiből (1) már következik.

Bán Rita (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Ha a háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ-val, a köré írt kör sugarát pedig r-rel jelöljük, akkor $OF_a = BF_a = 2r\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$ és $AF_a = 2r\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right) = 2r\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma-\beta}{2}\right) = 2r\cos\frac{\gamma-\beta}{2}$, hiszen BF_a-hoz $\frac{\alpha}{2}$, AF_a-hoz $\beta+\frac{\alpha}{2}$ nagyságú kerületi szög tartozik. Az (1) egyenlőség ennek alapján is bizonyítható:

$$\frac{AC+AB}{BC} = \frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{AF_a}{OF_a}.$$

A bizonyított egyenlőtlenség trigonometrikus alakja tehát így fest:

$$\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}} + \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}} \geqq 6,$$

ami az ismert

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}\geqq 6$$

egyenlőtlenség élesítése.