Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ tizedes tört alakjában a $(k+1)$-edik jeggyel kezdődően l db egymás utáni számjegy egyforma, jelöljük ezt a számjegyet c-vel. A feladat megoldásához elég bizonyítani, hogy $l \le k+2$. Valóban, eszerint hatmillió egyforma számjegyet legalább 5 999 998 más jegynek kell megelőznie, és ez az első tízmillió jegy között nem lehetséges.

Legyen tehát $\sqrt{2}$ tizedes tört alakjának első $(1+k-l)$ jegye $1,a_1a_2\ldots a_kcc\ldots c$, és jelöljük A-val az

$$A = 1,a_1a_2\ldots a_k + \frac{c}{9}\cdot 10^{-k} = 1,a_1a_2\ldots,a_kccc\ldots$$

számot. Ekkor $|\sqrt{2}-A| \le 10^{-k-l}$, hiszen $\sqrt{2}$ és A első $k+l$ tizedesjegye megegyezik. Az egyenlőtlenséget $(\sqrt{2}+A)$-val szorozva, és felhasználva, hogy $\sqrt{2}+A<4$, $|2-A^2|<4\cdot 10^{-k-l}$-re jutunk. $B=9\cdot 10^k\cdot A$ egész szám, így $81\cdot 10^{2k}$-nal szorozva, $|162{\cdot}10^{2k}-B^2|<364\cdot 10^{k-l}$. Ha $l\ge k+3$, akkor $|162\cdot 10^{2k}-B^2|<0{,}364$; így mivel mindkét szám egész, $162\cdot 10^{2k}=B^2$, ami ellentmondás, hiszen 162 nem négyzetszám.

Megjegyzés. Hátsó borítónkon $\sqrt{2}$ első 3001 jegye látható. A számot nagy pontossággal elsőként feltehetően egy, a 19. század végén élt ügyvéd, jogász és műszaki tanácsadó, *J. M. Boorman* számította ki. Összesen 569 jegyet adott meg, később kiderült, hogy ebből csak az első 316 helyes. Elektronikus számítógépet 1966-ban vetettek be, s 1967-ben már az első százezer számjegy ismert volt. 1970/71-ben azután egy IBM 360/91-es számítógépen 48 órai számítással *J. Dutka* egymillió számjegyet kapott (Columbia Egyetem, USA). Ez utóbbi számítás érdekessége, hogy egy, ún. Pell-egyenletet alkalmazott. Ha P_k és Q_k olyan pozitív egészek, melyekre, $P_k^2-2Q_k^2=4$, akkor $P_{k+1}=P_k^2-2$ és $Q_{k+1}=P_kQ_k$ is ilyenek:

$$P_{k+1}^2-2Q_{k+1}^2=(P_k^2-2)^2-2(P_kQ_k)^2=P_k^2(P_k^2-2Q_k^2-4)+4=4.$$

Könnyen igazolható, hogy P_k/Q_k a $\sqrt{2}$-től kevesebb, mint $2/Q_k^2$-val tér el. Dutka a $P_0=6726$ és $Q_0=4756$ számokból indult ki, majd az eljárást 17-szer iterálta. A P_{17} és Q_{17} egész számok mindegyike több mint félmillió számjegyet tartalmaz, és hányadosuk millió tizedes jegy pontossággal közelíti $\sqrt{2}$-t. Dutka ezután négyzetre emelte az eredményt: a kapott szám egyessel kezdődött, amit a tizedesvessző után 1 000 082 darab kilences követett.