I. megoldás. Az (1) egyenletnek akkor és csak akkor van két valós gyöke, ha D diszkriminánsa pozitív. A diszkrimináns az alábbi alakba írható:

$$\begin{aligned} D &= (a_1+a_2+a_3+a_4)^2 - 4a_1a_3 - 4a_2a_4 = \\ &= (a_1+a_2)^2 + (a_1+a_4)^2 + (a_2+a_3)^2 + (a_3+a_4)^2 - (a_1+a_3)^2 - (a_2+a_4)^2. \end{aligned}$$

Ha a_1+a_3 nem negatív, akkor az $a_1+a_3 < a_1+a_2$ egyenlőtlenségből $(a_1+a_3)^2 < (a_1+a_2)^2$ következik. Ha viszont a_1+a_3 negatív, akkor a_1+a_4 nagyobb abszolút értékű negatív szám, tehát $(a_1+a_3)^2 < (a_1+a_4)^2$. Mindkét esetben fenn áll, hogy

$$(a_1+a_3)^2 < (a_1+a_2)^2 + (a_1+a_4)^2. \tag{2}$$

Másrészt ha a_2+a_4 nem negatív, akkor $a_2+a_4 < a_2+a_3$ miatt $(a_2+a_4)^2 < (a_2+a_3)^2$ is igaz. Ha viszont a_2+a_4 negatív, akkor a_3+a_4 nála kisebb, tehát nagyobb abszolút értékű, és így $(a_2+a_4)^2 < (a_3+a_4)^2$. Mindenesetre

$$(a_2+a_4)^2 < (a_2+a_3)^2 + (a_3+a_4)^2. \tag{3}$$

Ha a (2) és (3) egyenlőtlenségeket összeadjuk, és egy oldalra rendezzük, éppen $D > 0$-t kapunk, amit bizonyítani akartunk.

II. megoldás. A diszkriminánst az alábbi alakra is hozhatjuk:

$$\begin{aligned} D &= (a_1+a_2+a_3+a_4)^2 - 4a_1a_3 - 4a_2a_4 = \\ &= (a_1+a_4)^2 + (a_2+a_3)^2 + 2(a_2-a_3)(a_1-a_4). \end{aligned}$$

A jobb oldalon az első két tag nem negatív, hiszen négyzetszám, a harmadik tag viszont két pozitív szám szorzatának kétszerese, hiszen $a_2 > a_3$ és $a_1 > a_4$ a feltételek szerint. Következésképp a harmadik tag pozitív, s így a diszkrimináns pozitív. Ebből pedig következik, hogy az egyenletnek két különböző valós gyöke van.

III. megoldás. (1) bal oldalának képe felfelé nyíló parabola. Ha sikerül bizonyítani, hogy van olyan x érték, amelyhez tartozó függvényérték negatív, akkor ebből már következik, hogy a parabola két pontban metszi az x tengelyt, tehát az egyenletnek kétvalós gyöke van.

Írjuk (1) bal oldalát a következő alakba:

$$f(x) = \left(x^2 - (a_1+a_3)x + a_1a_3\right) + \left(x^2 - (a_2+a_4)x + a_2a_4\right) - x^2.$$

Itt $x^2-(a_1+a_3)x+a_1a_3$ másodfokú függvény, amelynek két nullhelye van: $x=a_1$ és $x=a_3$; tehát az a_1 és a_3 közé eső $x=a_2$ helyen negatív értéket vesz fel. Az $x^2-(a_2+a_4)x+a_2a_4$ másodfokú függvény az $x=a_2$ helyen nulla (másik nullhelye az $x=a_4$ érték). Végül a $-x^2$ függvény nem pozitív az $x=a_2$ helyen. Ebből következik, hogy $f(a_2)<0$, f képe tehát olyan felfelé nyíló parabola, amelynek $x=a_2$ értékhez tartozó pontja az x tengely alatt van, s ezt akartuk bizonyítani.

Egyenletünknek tehát van egy a_2-nél kisebb és van egy a_2-nél nagyobb valós gyöke.

Megjegyzés. A második megoldás mutatja, hogy elég lett volna feltenni, hogy $a_2 > a_3$ és $a_1 > a_4$. A harmadik megoldás pedig azt, hogy a feladat állítása már abból is következik, hogy $a_1 > a_2 > a_3$.