1. Írjuk összeg alakban a két- és a három jegyű számokat − az egyes számjegyek helyi értékének figyelembevételével − , majd rendezzük át az egyenlet jobb oldalát:

$$(1)\qquad \begin{aligned}100A+10B+C &= (10A+B)\cdot C+(10B+C)\cdot A+(10C+A)\cdot B=\\ &=11(AB+BC+AC).\end{aligned}$$

Eszerint mindkét oldal többszöröse a 11-nek. A bal oldali együtthatók csak $1-1$ egységgel térnek el 11-nek egy-egy többszörösétől, így

$$(2)\qquad 100A+10B+C=11(9A+B)+(A-B+C),$$

eszerint $(A-B+C)$ is osztható 11-gyel.

A kérdéses számjegyek mindegyike előfordul kezdő számjegyként, így:

$$1\le A,\ B,\ C\le 9,$$

emellett különböző egész számok. Ezért egyrészt

$$A+C-B\le 9+8-1=16,$$

másrészt

$$A+C-B\ge 1+2-9=-6.$$

E két korlát között csak két szám osztható 11-gyel, nevezetesen 0 és 11, e két eshetőséget külön-külön vizsgáljuk.

2. Ha $A-B+C=0$, helyettesítsük (1)-ben B helyére $A+C$-t. Mindjárt 11-gyel osztva:

$$(3)\qquad 10A+C=(A+C)^2+AC,$$

vagyis

$$10A-A^2-3AC=A(10-A-3C)=C^2-C=C(C-1).$$

Eszerint a jobb oldal osztható A-val, írjuk így: $C(C-1)=KA$, ahol $K\ge 0$, egész szám.

A $K=0$ eset tüstént megoldást ad, ebből ugyanis $C=1$, és az

$$A(7-A)=0$$

egyenletből $A=7$, majd $B=8$, és valóban teljesül, hogy

$$78\cdot 1+81\cdot 7+17\cdot 8=781.$$

Viszont $K>0$ mellett nincs megoldás, mert így egyrészt $C\ne 1,\ C\ge 2$ másrészt az A-val osztott egyenletből

$$10-A-3C=K\ge 1,$$

emiatt $C<3,\ C\le 2$. Márpedig $C=2$ mellett (3) alakja $A^2-4A+2=0$, és ennek nincs egész gyöke.

3. Ha pedig $A-B+C=11$, ismét a $B=A+C-11$ kiküszöböléssel, hasonló lépésekkel (1)-ből

$$10A+C-10=(A+C-11)(A+C)+AC,$$

amit most így rendezünk át:

$$(4)\qquad 3(7A+4C-AC-4)=A^2+C^2-2.$$

A bal oldal miatt a jobb oldal is osztható 3-mal, vagyis 3-mal osztva (A^2+C^2)-et, maradékul 2 adódik. Mivel a $3k,\ 3k+1,\ 3k-1$ alakú számok négyzete sorra $3m$, ill. $(3m+1)$, ill. $(3m+1)$ alakú, azért A és C egyike sem osztható 3-mal. Ezért $A+C\le 8+7=15$, másrészt $B\ge 1$ miatt $A+C\ge 12$. Most $A+C$ számára végigvizsgáljuk a $12,\ 13,\ 14$ és 15 értékeket. Ehhez így alakítjuk (4)-et:

$$3(A-4)(7-C)=A^2+C^2-74.$$

Az $A+C=12$ összeg $8+4$ és $7+5$ alakban adódhat ki – mindkét sorrendben – és a jobb oldal értéke 6, illetve 0 lesz, egyszersmind

$$(A-4)(7-C)=2,\qquad \text{illetve}\qquad 0.$$

Ha a jobb oldal 2, akkor $A\ne 4$, viszont $A=8$ és $C=4$ mellett nem teljesül az egyenlet. A másik eshetőségből $C=7$, és $A=5,\ B=1$ megoldást ad, teljesül a követelmény:

$$517=51\cdot 7+17\cdot 5+75\cdot 1.$$

A további három eset nem ad megoldást. $A+C=14$-ben a korlát és $A\neq C$ miatt a kisebbik számjegy 6-nak kínálkozik, de ez többszöröse a 3-nak. $A+C=15$ csak $8+7$ alakban, $A+C=13$ csak $8+5$ alakban jön szóba, ezekkel azonban a jobb oldal $39=3\cdot 13$, illetve $15=3\cdot 5$, márpedig a bal oldalban nem állhat elő 13-as, ill. 5-ös tényező.

Minden eshetőséget számba vettünk és a következő két számjegyhármast találtuk megfelelőnek:

$$A=7,\ B=8,\ C=1 \qquad \text{és} \qquad A=5,\ B=1,\ C=7.$$

Megjegyzések. 1. A (2) átrendezés nem csak alkalmi fogás, hanem bármilyen sokjegyű számnál használható, a 11 *-gyel való oszthatóság könnyítő ismertető jele.* Minden páros kitevőre $10^{2k}-1$ osztható $10^2-1=11\cdot 9$-cel és minden páratlan kitevőre $10^{2k+1}+1$ osztható $(10+1)$-gyel. Más szóval: 10^n-nek a 11-gyel való osztásbeli maradéka $+1$, ill. (-1) aszerint, hogy n páratlan, ill. páros. Ennélfogva az $N=a_na_{n-1}\ldots a_1a_0$ szám helyett elegendő vizsgálni a számjegyeiből képezett $J=(a_0+a_2+a_4+\ldots)-(a_1+a_3+a_5+\ldots)$ különbséget. N akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha J osztható vele.

2. Nem értékeltük azokat a dolgozatokat, amelyek számítógépes vizsgálat alapján kapták meg a megfelelő számjegyhármasokat (lásd a pontversenykiírást lapunk szeptemberi számában).