I. megoldás. A feladat első részének megoldásához jelölje F_a, F_b, F_c az A, B, ill. C csúcsból induló szögfelező és az ABC háromszög köré írt kör második metszéspontját. Jelölje α, β, γ a háromszög szögeit (1. ábra).

1984-05-209-1.eps

1. ábra

$BF_a = OF_a$, mert az OBF_a háromszög F_a-nál fekvő szöge γ (az AB íven nyugvó kerületi szög), O-nál fekvő szöge pedig az ABO háromszög két belső szögének összegével, $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$-vel egyenlő. Ezek szerint $OBF_a\sphericalangle = 180^\circ - \gamma - \dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, vagyis megegyezik a BOF_a szöggel. Jelölje T az OB szakasz felezőpontját, A_1 pedig legyen az O pont vetülete a BC szakaszon. Ekkor az OA_1C és az OTF_a derékszögű háromszögek hasonlóak, hiszen C-nél, ill. F_a-nál $\gamma/2$ szög van. A megfelelő oldalak arányát felírva: $OT : OA_1 = OF_a : OC$. Szorozzuk mindkét oldalt $2OA_1 \cdot OC$-vel, és használjuk fel, hogy $2OT = OB,\ OA_1 = \varrho$, ekkor a következő egyenlőséghez jutunk:

$$OB \cdot OC = 2\varrho \cdot OF_a.$$

A feladat első állításának bizonyításához tehát elég belátni, hogy

$$OA \cdot OF_a = 2r\varrho, \tag{2}$$

mert (1) és (2) szorzatából éppen a kívánt egyenlőséget kapjuk.

1984-05-209-2.eps

2. ábra

(2) bizonyításához jelöljük K-val az ABC háromszög köré írt kör középpontját és Q-val BF_a felezőpontját (2. ábra). A KF_aB háromszög egyenlő szárú ($KF_a = KB = r$), és a K-nál levő szöge α, hiszen $BKC\sphericalangle = 2\alpha$, és F_a felezi a BC ívet, tehát KF_a felezi a BKC szöget. QK szögfelező a KF_aB háromszögben, tehát $BKQ\sphericalangle = \alpha/2$. Jelölje most O vetületét AB-n C_1. Az AC_1O derékszögű háromszögben $C_1AO\sphericalangle = \alpha/2$, következésképp ez hasonló a KQB háromszöghöz. A megfelelő oldalak arányát felírva: $OA : BK = OC_1 : BQ$. Itt $BK = r,\ OC_1 = \varrho$ és $BQ = BF_a/2$. Tehát $2BQ \cdot BK$-val végigszorozva kapjuk, hogy $BF_a \cdot OA = 2r\varrho$. Láttuk, hogy $BF_a = OF_a$. Ezt beírva éppen (2)-t kapjuk.

A feladat második részének bizonyításához felhasználjuk a számtani és a mértani közép közt fennálló egyenlőtlenséget, továbbá az ismert $2\varrho \le r$ egyenlőtlenséget (ami pl. (2)-ből is következik, l. a megjegyzést a megoldás után):

$$\frac{OA+OB+OC}{3} \ge \sqrt[3]{OA \cdot OB \cdot OC} = \sqrt[3]{4\varrho^2 r} \ge \sqrt[3]{8\varrho^3} = 2\varrho.$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $OA = OB = OC$ és $2\varrho = r$. Mindkettő pontosan akkor áll fenn, ha a beírt és köré írt kör középpontja egybeesik, vagyis ha a háromszög szabályos.

II. megoldás. Az (1) összefüggést trigonometria segítségével bizonyítjuk. Írjuk fel kétféleképpen a BCO háromszög területét:

$$2T = OC \cdot OB \sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = OB \cdot OC \cdot \cos\frac{\alpha}{2},$$
$$2T = BC \cdot \varrho = 2r \sin\alpha \cdot \varrho = 4r\varrho \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Felhasználtuk, hogy $BOC\sphericalangle = 180^\circ - \dfrac{\gamma}{2} - \dfrac{\beta}{2} = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.

A kettő összevetéséből $OB \cdot OC = 4r\varrho \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

A C_1AO derékszögű háromszögben $OA \sin\dfrac{\alpha}{2} (= OC_1) = \varrho$. A fenti egyenlőséget ezzel összeszorozva és $\sin\dfrac{\alpha}{2} (\neq 0)$-val osztva éppen az (1) egyenlőséget kapjuk.

Megjegyzés. A felhasznált $2\varrho \leqq r$ egyenlőtlenség bizonyítása legegyszerűbben úgy történik, hogy tekintjük az ABC háromszög Feuerbach körét, s ennek meghúzzuk az $AB,\ BC$, ill. CA oldallal párhuzamos érintőjét. Az így létrejövő $A'B'C'$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, mert szögei egyenlők, a hasonlóság λ aránya nem kisebb 1-nél. Másrészt $A'B'C'$ beírt köre éppen az ABC háromszög – $r/2$ sugarú – Feuerbach-köre. Következésképp $r/2 = \lambda\varrho \geqq \varrho$. Egyenlőség pontosan akkor van, ha a Feuerbach-kör egybeesik a beírt körrel, vagyis a háromszög szabályos.

1984-05-210-1.eps

3. ábra

(2)-ből azonban több is következik: segítségével bebizonyítjuk *Euler* híres tételét a beírt és körülírt kör középpontjának távolságáról, amely szerint $OK^2 = = r^2 - 2r\varrho$. Ehhez elég O-n keresztül merőlegest állítani OK-ra (3. ábra), a merőleges messe a háromszög köré írt körét az M és N pontban. Egyrészt $OM = ON$, tehát $OM \cdot ON = OM^2 = KM^2 - OK^2 = r^2 - OK^2$, másrészt az O pontnak a körre vonatkozó hatványa éppen $OM \cdot ON = OA \cdot OF_a = 2r\varrho$. Ebből $r^2 - OK^2 = 2r\varrho$, ahogy állítottuk.