

Legyenek az adott számok növekvő sorrendben  $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$ . Ha  $a_1 = 0$ , akkor az állítás nyilvánvaló: a feltételeknek például  $a_1$  és  $a_2$  megfelel. A továbbiakban tegyük fel, hogy  $a_1 > 0$ .

Az  $a_n$  számhoz bármely másikat kiválasztva a két szám összege biztosan nem szerepel a többi szám közt, mert  $a_n$  a legnagyobb. Ha valamely  $1 \leq i \leq n-1$  esetén  $|a_n - a_i| = a_n - a_i$  nem szerepel az  $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \dots, a_{n-1}$  közt, akkor készen vagyunk. Ha minden  $i$ -hez létezik olyan  $1 \leq j \leq n-1$ , amelyre  $a_n - a_i = a_j$ , és  $i \neq j$ , akkor  $a_n$ -et kivéve a többi szám párba állítható úgy, hogy a párok összege éppen  $a_n$ . Mivel ilyen párba állítás csak akkor lehetséges, ha  $n-1$  páros, a feladat állítását beláttuk azokra az esetekre, mikor  $n-1$  páratlan, azaz amikor  $n$  páros. Azokból az esetekből is, mikor  $n$  páratlan, csak azok maradtak hátra, melyekben  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  párokba állítható, vagyis amikor

$$(1) \quad a_k + a_{n-k} = a_n \quad \text{minden} \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad \text{esetén.}$$

Vizsgáljuk meg az  $a_{n-1}$  és  $a_{n-2}$  számokat. Különbségük (1) alapján

$$a_{n-1} - a_{n-2} = (a_n - a_1) - (a_n - a_2) = a_2 - a_1 < a_2,$$

tehát vagy nem szerepel az adott számok között, vagy éppen  $a_1$ -gyel egyenlő. Ez utóbbi esetben hasonlóan továbbmenve  $a_1 = a_{n-1} - a_{n-2} < a_{n-1} - a_{n-3} = a_3 - a_1 < a_3$  miatt  $a_{n-1} - a_{n-3}$  vagy nem szerepel a számok között, vagy  $a_{n-1} - a_{n-3} = a_2$ . Végül eljutunk  $k = \frac{n-1}{2}$ -ig, ( $n$  páratlan!), amikor is  $a_{k-1} < a_{n-1} - a_k < a_{k+1}$ , adódik, és most akár egyenlő az  $a_{n-1} - a_k$  különbség  $a_k$ -val, akár különbözik tőle,  $a_{n-1} - a_k$  biztosan *nem* szerepel a megmaradt számok között. Így a  $k = n-2, k = n-3, \dots, k = \frac{n-1}{2}$  közül valamelyikre  $a_{n-1} - a_k$  nem szerepel a megmaradt számok között. S mivel  $n \geq 4$ , azért  $k > 1$  és így  $a_{n-1} + a_k > a_{n-1} + a_1 = a_n$ , azaz a talált számoknak sem összege, sem különbsége nincs a megmaradtak között. Ezzel az állítást páratlan  $n$ -re is beláttuk.

*Megjegyzések.* 1.  $n = 3$ -ra nem igaz az állítás, ezt például az 1, 2, 3 számhármass mutatja.

2. Nem használtuk ki, hogy az  $a_i$  számok egészek, így a feladat állítása tetszőleges, különböző nem negatív számokból álló szám  $n$ -esre igaz.