Jelöljük a háromszög csúcsait rendre $A,\ B,\ C$-vel. Először megmutatjuk, hogy ha $\alpha=3\beta$, akkor $c=(a-b)\sqrt{1+\frac{a}{b}}$. Legyen az a oldal és az α szög c oldalhoz közelebbi harmadolójának metszéspontja P. Ekkor $PAB\sphericalangle=PBA\sphericalangle=\beta$, $CAP\sphericalangle=CPA\sphericalangle=2\beta$, így $CA=CP=b$ és $PA=PB=a-b$. Az APC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$b^2=b^2+(a-b)^2-2b(a-b)\cos 2\beta.$$

Ezért

$$2\cos 2\beta=\frac{a}{b}-1. \tag{1}$$

1984-05-206-1.eps

Az APB háromszögben ugyancsak a koszinusztétel szerint:

$$c^2=2(a-b)^2-2(a-b)^2\cos(180^\circ-2\beta),$$

így

$$c^2=(a-b)^2(2+2\cos 2\beta).$$

Behelyettesítve (1) -et, kapjuk, hogy

$$c^2=(a-b)^2\left(1+\frac{a}{b}\right),$$

ahonnan $a>b$ miatt valóban fennáll, hogy

$$c=(a-b)\sqrt{1+\frac{a}{b}}. \tag{2}$$

Másodszor megmutatjuk, hogy ha a (2) összefüggés teljesül, akkor $\alpha=3\beta$. Szintén a koszinusztétel alapján

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=(a-b)^2+2ab(1-\cos\gamma),$$

másrészt (2) miatt

$$c^2=(a-b)^2+(a-b)^2\frac{a}{b}.$$

Ezekből

$$2(1-\cos\gamma)=\frac{1}{ab}(a-b)^2\frac{a}{b}=\left(\frac{a-b}{b}\right)^2. \tag{3}$$

Legyen P az a oldal azon pontja, melyre $CP=b$. Ekkor az ACP háromszögben (3) szerint

$$AP^2=b^2+b^2-2b^2\cos\gamma=2b^2(1-\cos\gamma)=(a-b)^2.$$

Mivel $AP>0$ és $a-b>0$, azért $AP=a-b=PB$. Ebből következik, hogy $PAB\sphericalangle=PBA\sphericalangle=\beta$, $CAP\sphericalangle=CPA\sphericalangle=PAB\sphericalangle=PBA\sphericalangle=2\beta$, és végül $\alpha=CAP\sphericalangle+PAB\sphericalangle=3\beta$, az állításnak megfelelően.

Megjegyzés. Sokan a feladat állítását csak az egyik irányban látták be, illetve (tévesen) azt állították, hogy okoskodásuk megfordítható. Ezek a megoldók 1 pontot kaptak.