1. Jelöljük az $ABCDM$ szabályos 4-oldalú gúla alapnégyzetének középpontját N-nel, az AD alapél hosszát a-val, felezőpontját F-fel, továbbá a körülírt G és a kérdéses G_1 gömb középpontját és sugarát O-val, R-rel, illetve O_1-gyel és ϱ-val, végül az adott lapszöget α-val, az FMO szöget φ-vel, a DMO szöget δ-val.

A gúla szimmetrikus egyrészt a $DMO = S$, másrészt az $FMO = S_1$ síkra. Az utóbbi merőleges az $ADM = L$ oldallapsíkra. Az S_1-re való tükrözés egymásba viszi át az AD csúcspárt és önmagába az egész alakzatot, tehát G_1-nek a G-vel és az L-lel való M_1, ill. E érintkezési pontját is. Ezért E rajta van L és S_1 metszésvonalán, az MF egyenesen, M_1 pedig G-nek M-mel átellenes pontja, továbbá az O_1 is az MO-n van.

Az O_1EM derékszögű háromszögben

$$\sin\varphi = \frac{O_1E}{MO_1} = \frac{O_1E}{MM_1 - O_1M_1} = \frac{\varrho}{2R-\varrho},$$

innen

$$\varrho = \frac{2R}{\dfrac{1}{\sin\varphi}+1}. \tag{1}$$

1984-03-110-1.eps

Legyen A vetülete az MD egyenesen P, az S-re való tükrösség alapján ez egyben C-nek is vetülete, tehát $APC\sphericalangle = \alpha$. Az APC egyenlő szárú háromszögből

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{PN}{AN} = \frac{PN}{DN} = \sin NDP\sphericalangle = \cos\delta. \tag{2}$$

(1) céljára φ és δ közt kapunk összefüggést:

$$\operatorname{tg}\,\varphi = \frac{FN}{MN} = \frac{DN}{\sqrt{2}MN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\,\delta, \tag{3}$$

továbbá $2R$ és az ismert $AD = a$ alapél között a DMM_1 derékszögű háromszögből:

$$2R = \frac{DM}{\cos\delta} = \frac{DN}{\cos\delta\sin\delta} = \frac{a}{\sqrt{2}\cos\delta\sin\delta}. \tag{4}$$

Egyelőre ott tartunk, hogy numerikus adatok mellett α-ból (2) alapján kiszámíthatjuk δ-t, ebből (3) alapján φ-t és (4) alapján $2R$-et – az a élt is felhasználva – és ekkor (1)-ből kiszámítható a ϱ sugár.

A következőkben ϱ-t közvetlenül a-val és α-val fogjuk kifejezni. Egyfelől

$$\sin\delta = \sqrt{1-\cos^2\delta} = \sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1-\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{-2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},$$

így a (4)-beli nevező

$$\sqrt{\frac{2(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{-2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{2\sqrt{-\cos\alpha(1+\cos\alpha)}}{1-\cos\alpha},$$

továbbá az (1)-beli nevező céljára

$$\frac{1}{\sin\varphi} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi}} = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg}^2\delta}+1} = \sqrt{\frac{2\cos^2\delta}{1-\cos^2\delta}+1} = \sqrt{\frac{\cos^2\delta+1}{1-\cos^2\delta}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}+1}{1-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{-\cos\alpha}},$$

ennélfogva (1)-ből

$$\varrho = \frac{a(1-\cos\alpha)}{2\sqrt{1+\cos\alpha}(1+\sqrt{-\cos\alpha})}.$$

Az adott α mindig tompaszög, tehát $-\cos\alpha > 0$, ugyanis rögzített R mellett, ha N tart M-hez, akkor α tart 180°-hoz. Ha pedig N az M_1-hez tart, akkor α tart 90°-hoz.

2. Az előírt speciális esetben gúlánk egy szabályos oktaéder fele, N egybeesik O-val. Ekkor az oldallapok $MFN\sphericalangle = \alpha/2$ szöggel hajolnak az alapsíkhoz:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = -\frac{1}{3}$$

és

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1\right) = R\left(\sqrt{3}-1\right).$$

3. Belátjuk még, hogy ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, akkor mindig létezik a G_1 gömb, illetve az OM_1 szakasz megfelelő belső O_1 pontja. Tekintsük O-nak H vetületét az MF félegyenesen, ekkor $OH = R\sin\varphi < R = OM_1$, tehát az O körüli, a gúla oldallapsíkjait érintő gömb nem érinti G-t. Amint egy O_1^* pont halad O-tól M_1-ig, $O_1^*H^*$ monoton és folytonosan nő, $O_1^*M_1$ pedig folytonosan csökken O-ig, tehát közben pontosan egyszer beáll az $O_1^*H^* = O_1^*M_1$ egyenlőség.