1. Elég egyetlen ellenpélda, hogy nemet mondhassunk a kérdésre. Legyen ABC derékszögű háromszög, csúcsaiban sorra 30°-os, 90°-os, 60°-os szöggel és kapcsoljuk ehhez negyedik csúcsnak azt a D pontot, amelyre $DC \parallel AB$ és $DB \perp AC$. A négy részre vágott $ABCD$ trapéznak az AB, BC, CD oldalra támaszkodó részeiben a szögek ismét 30°, 60°, 90°-osak. Az AD-re támaszkodó háromszögben viszont nincs 60°-os szög, amely egyedül felelne meg az állításnak, ugyanis D nem tükörképe a B-nek az AC átlóra nézve

$$CD \neq CB (= \sqrt{3} CD)$$

miatt.

1984-02-066-1.eps

1. ábra

2. Van olyan négyszög, amely alapot ad a föltett kérdéshez. Legyen $ABCD$ olyan trapéz, amelyben B-nél derékszög van, $BC = AB/\sqrt{2}$ és $CD = BC/\sqrt{2}$. Ebben $\cos CAB\sphericalangle = \sqrt{2/3}$, másfelől $\cos ADB\sphericalangle = \frac{1}{3}$, és a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ azonosság szerint $\cos 2 \cdot CAB\sphericalangle = 1/3$.

3. Nincs másfajta konvex négyszög, amely megfelelne a feladatban szereplő feltételeknek, mint azok a derékszögű trapézok, amelyekben az átlók M metszéspontjánál derékszögek vannak, és a két alap különböző hosszú. Ha ugyanis az M-nél keletkező csúcspárok közül kettőnek a nagysága $\gamma \neq 90°$, akkor a másik kettőé $180° - \gamma$, és az ezeket tartalmazó háromszögekben nem lehet γ nagyságú szög, hiszen a további két szög együttvéve γ.

Ha pedig $AC \perp BD$, és azt kívánjuk, hogy az ABM, BCM és CDM háromszögek hasonlóak legyenek valamilyen körüljárás szerint, akkor $ABM\sphericalangle = \beta \neq 45°$ jelöléssel a CBM szögre a $90° - \beta$ és a β értékek jönnek szóba.

1984-02-066-2.eps

2. ábra

Az első esetben $ABC\sphericalangle = 90°$, a másodikban az $ABCD$ négyszög deltoid lesz, a megkülönböztetett DAM háromszög egybevágó a DCM-mel, mi pedig nem ezt keressük. Ugyanide vezetne a $\beta = 45°$ föltételezés is.

Folytatva az első esetet, ismét nem lehet $BCM\sphericalangle = DCM\sphericalangle$, tehát $BCM\sphericalangle + DCM\sphericalangle = 90°$, C-nél is derékszög van, és így $CD \parallel AB$, $CDM\sphericalangle = \beta$.

Végül $\beta \neq 45°$ miatt elég tekintenünk a $\beta > 45°$ esetet. Ekkor $AM > BM > CM > DM$ és ez a négy szakasz mértani sorozatot alkot (ebben a sorrendben), melynek hányadosa $0 < \operatorname{ctg}\beta < 1$, így $ADM\sphericalangle = \operatorname{ctg}^3\beta$, ezért

$$45° < \beta < ADM\sphericalangle.$$

Az $ADM\sphericalangle = 2\ (90° - \beta)$ feltételezés a már látott $\operatorname{ctg}\beta = \sqrt{2}$ esetre vezet.