

I. megoldás. Jelöljük r -rel a k kör sugarát, és legyen ABC egy k -t érintő háromszög. Belátjuk, hogy

$$(1) \quad OA^2 + OB^2 + OC^2 \geq 12r^2,$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha az ABC háromszög szabályos. Jelölje az AB , BC , CA szakaszok érintési pontját rendre C_1 , A_1 , B_1 .

1984-04-155-2.eps

Az A_1BO és C_1BO háromszögek egybevágóak, hiszen A_1 -nél, ill. C_1 -nél derékszög van, $OA_1 = OC_1 = r$ és $A_1BO \sphericalangle = C_1BO \sphericalangle$. Következésképp $A_1OB \sphericalangle = C_1OB \sphericalangle$, jelöljük ezt a szöveget β -val. Hasonlóan látható, hogy $A_1OC \sphericalangle = B_1OC \sphericalangle$ és $C_1OA \sphericalangle = B_1OA \sphericalangle$, jelöljük e szöveget γ -val, ill. α -val.

Az A_1OB derékszögű háromszögben $A_1O/OB = \cos \beta$, amiből $OB = A_1O/\cos \beta = r/\cos \beta$ következik. Ugyanígy $OA = r/\cos \alpha$ és $OC = r/\cos \gamma$. Ezeket (1)-be írva végül is azt kell igazolnunk, hogy

$$(2) \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} \geq 12,$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Tudjuk, hogy $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$, amiből $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, továbbá α , β és γ hegyesszög. Be fogjuk látni, hogy ilyen feltételek mellett (2) mindig fennáll és egyenlőség pontosan akkor van, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

A négyzetes és harmonikus közép közötti összefüggés alapján:

$$(3) \quad \sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma}}{3}} \geq \frac{3}{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma},$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma > 0$. α , β , γ nyilván lehetnek egy háromszög szögei, hiszen hegyesszögek és $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. De ismeretes, hogy egy háromszög α , β , γ szögeire

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2},$$

és itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, vagyis a háromszög szabályos. Mivel esetünkben α , β , γ hegyesszögek, tehát $0 < \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$, ez (3)-mal összevetve

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma}}{3}} \geq \frac{3}{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma} \geq 2$$

adódik, ami ekvivalens (2)-vel.

Egyenlőség akkor áll, ha egyrészt $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma > 0$, másrészt ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tehát (2)-ben is pontosan akkor áll egyenlőség, amikor $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Ez esetben az ABC háromszög szabályos, amit bizonyítani kellett.

II. megoldás. Jelöljük a k kör sugarát r -rel, az ABC háromszög oldalait a , b , c -vel, és legyen a szokásos módon $2s = a + b + c$. Ekkor a háromszög területe egyrészt rs , másrészt a Heron-képlet alapján $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, azaz

$$(4) \quad r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a) + (s-b) + (s-c)},$$

hiszen $s = (s-a) + (s-b) + (s-c)$. A k körnek és az oldalaknak érintési pontjait A_1 , B_1 , C_1 -gyel jelölve $AC_1 = s-a$, $BA_1 = s-b$, $CB_1 = s-c$, és az AOC_1 , BOA_1 , COB_1 derékszögű háromszögekből a kérdéses K kifejezés

$$\begin{aligned} K &= OA^2 + OB^2 + OC^2 = OC_1^2 + AC_1^2 + OA_1^2 + BA_1^2 + OB_1^2 + CB_1^2 = \\ &= 3r^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2. \end{aligned}$$

(4)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{K - 3r^2}{r^2} = \frac{[(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2] \cdot [(s-a) + (s-b) + (s-c)]}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A jobb oldali számlálóban a két tényező mindegyike három-három pozitív szám összege. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget a tényezőkre külön-külön alkalmazva

$$\frac{K - 3r^2}{r^2} \geq \frac{3 \sqrt[3]{(s-a)^2 (s-b)^2 (s-c)^2} \cdot 3 \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}}{(s-a)(s-b)(s-c)} = 9,$$

vagyis $K \geq 12r^2$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $s - a = s - b = s - c$, vagyis ha $a = b = c$, a háromszög szabályos. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. A dolgozatokban sokféle megoldástípus fordult elő, nagy részük nem is volt helyes. A hibás dolgozatok jelentős részében az a helytelen következtetés található, hogy mivel a számtani (ill. négyzetes) és mértani (ill. harmonikus) közepek közti egyenlőtlenségben egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a számok egyenlők, ezért a számtani (ill. négyzetes) közép minimuma is ekkor van. Másik gyakori hiba, hogy a négyzetösszeget tagonként minimalizálják. Sokszor előfordult az is, hogy a k kör helyett az ABC háromszöget rögzítették és keresték azt a P pontot, amire $PA^2 + PB^2 + PC^2$ minimális.