I. megoldás. Tegyük fel a feladat állításával ellentétben, hogy a fenti egyenletnek x_1, x_2 és x_3 három különböző valós gyöke. Mint ismeretes, ez esetben a gyökök és együtthatók közötti összefüggés alapján

$$x_1 + x_2 + x_3 = -4,$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 6.$$

Az első négyzetéből a második háromszorosát kivonva

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 = -2.$$

A bal oldalt átalakítva:

$$\frac{1}{2}\big((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2\big) = -2.$$

Ez azonban lehetetlen, hiszen a bal oldalon három valós szám négyzetösszegének a fele áll, ami nem lehet negatív. Ez bizonyítja, hogy az $x^2 + 4x^2 + 6x + c = 0$ egyenletnek nem lehet három (különböző) valós gyöke.

II. megoldás. Az $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + c$ függvény értelmezési tartománya az egész számegyenes. $f(x)$ mindenütt deriválható, és derivált függvénye,

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 6 = 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3},$$

minden valós számra pozitív. Ebből következik, hogy az $f(x)$ függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növekszik. Szigorúan monoton függvény minden értéket, köztük a 0-t is, legfeljebb egy helyen vesz fel. Az $f(x)$ függvénynek tehát legfeljebb egy (valós) nullhelye van, ami bizonyítja a feladat állítását.

III. megoldás. A fenti $f(x)$ függvényről bizonyítjuk, hogy az egész számegyenesen szigorúan monotonan növekszik: Azt kell belátnunk, hogy ha $a > 0$, akkor

$$f(x + a) > f(x),$$

azaz

$$(x + a)^3 + 4(x + a)^2 + 6(x + a) + c > x^3 + 4x^2 + 6x + c.$$

Rendezés után az egyenlőtlenség ezt az alakot ölti:

$$a[3x^2 + (3a + 8)x + a^2 + 4a + 6] > 0, \quad \text{ha} > 0.$$

Elég tehát belátnunk, hogy a szögletes zárójelben pozitív szám áll. Ez pedig a teljes négyzetté kiegészítés módszerével könnyen adódik:

$$3x^2 + (3a + 8)x + a^2 + 4a + 6 = 3\left(x + \frac{3a + 8}{6}\right)^2 + \frac{3a^2 + 8}{12} \geq \frac{3a^2 + 8}{12} \geq \frac{2}{3} > 0.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az $f(x)$ függvény szigorúan monotonan növekszik.

Megjegyzés. Egy harmadfokú (valós együtthatós) polinomnak vagy három valós gyöke van, vagy egy; minden gyököt annyiszor számítva, amennyi a multiplicitása. (Utóbbi esetben a másik két gyök két komplex szám, amelyek egymásnak konjugáltjai.) Az I. megoldásból látszik, hogy esetünkben pontosan egy valós gyök van, a másik kettő komplex. A II. és III. megoldásból ez még nem következik azonnal, hiszen előfordulhatna, hogy egy háromszoros gyök van.

Tekintsük általában az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenletet. Az I. megoldás gondolatmenete azt adja, hogy ha $a^2 - 3b < 0$, akkor ennek az egyenletnek c minden értéke mellett csak egy gyöke van. Ha $a^2 = 3b$, akkor pedig vagy egy valós gyök van, vagy három azonos gyök. Belátható az is, hogy ha $a^2 - 3b > 0$, akkor van olyan c szám, amelyre három valós gyöke van az egyenletnek. A II. és III. megoldás az általános esetben azt adja, hogy ha $a^2 \leq 3b$, akkor az $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ c tetszőleges értékére szigorúan monoton növekvő függvénye x-nek. Belátható, hogy ha $a^2 > 3b$, akkor ez semmilyen c-re nem igaz.