Jelöljük az $ABCD$ tetraéder éleinek hosszát a-val. A tetraéder térfogata $V_1=\dfrac{a^3\sqrt2}{12}$, felszíne $F_1=a^2\sqrt3$, ezért

$$\kappa_1=\frac{V_1^2}{F_1^3}=\frac{\sqrt3}{648}.$$

Az $ABCD$ tetraéderből levágandó tetraéderek szintén szabályosak, hiszen minden lapjuk egyenlő oldalú háromszög; az oldalak hossza λa. A poliéderek térfogata minden levágáskor $\dfrac{a^3\sqrt2}{12}\cdot\lambda^3$-nel csökken, vagyis

$$V_n=V[1-(n-1)\lambda^3]\qquad(n=2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

(Mivel $\lambda\leqq\dfrac12$, a levágandó tetraéderek nem nyúlnak egymásba, legfeljebb páronként egy közös csúcsuk lehet.)

1984-01-015-1.eps

A poliéder felületéből minden levágáskor három $a\lambda$ oldalú szabályos háromszöget kell eltávolítanunk, majd egy ugyanilyen háromszöget hozzá kell raknunk, mivel a levágott tetraédernek egyik lapja a csonkítandó test belsejében volt, levágás után viszont ez a lap is része az új test felületének. A poliéderek felszíne tehát minden levágáskor $\dfrac{a^2\sqrt3}{2}\cdot\lambda^2$ -nel csökken, ezért

$$F_n=F_1\left[1-(n-1)\frac{\lambda^2}{2}\right]\qquad(n=2,\ 3,\ 4,\ 5.)$$

Ezek szerint a κ számok további értékei:

$$\kappa_n=\frac{(1-(n-1)\lambda^3)^2}{\left(1-(n-1)\dfrac{\lambda^2}{2}\right)^3}\cdot\kappa_1$$

($n=2,\ 3,\ 4,\ 5$, a képlet $n=1$-re is igaz.)

Belátjuk, hogy rögzített $0<\lambda\leqq\dfrac12$ érték mellett n növekedtével κ_n nő.

Segítségül vesszük folytonosan változó x esetére az

$$f(x)=\frac{(1-\lambda^3x)^2}{\left(1-\dfrac{\lambda^2}{2}x\right)^3}$$

függvényt, amely az $x=0,\,1,\,2,\,3,\,4$ egész értékek mellett rendre a $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3,\ \kappa_4,\ \kappa_5$ értéket veszi fel és $f(0)=1$. Belátjuk, hogy $f(x)$ a $0\leqq x\leqq4$ intervallumban szigorúan monoton növekvő, ugyanis deriváltja állandóan pozitív. (A nevező az $x=\dfrac{2}{\lambda^2}$ helyen válik zérussá, ez azonban kívül esik a vizsgálni kívánt intervallumon, mivel $2/\lambda^2\geqq8$; mindjárt említjük a számláló zérushelyét is: $x=1/\lambda^3\geqq8$.) Ezekből következik, hogy a kiragadott egész x-ek mellett is teljesül:

$$\kappa_1<\kappa_2<\kappa_3<\kappa_4<\kappa_5.$$

Áttérünk a szokásos jelölésekre, legyen

$$u(x)=(1-\lambda^3x)^2,\qquad v(x)=\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\,x\right)^3.$$

Az ismert deriválási szabályok szerint

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}=\\&=\frac{1}{\left(1-\dfrac{\lambda^2}{2}\,x\right)^6}\left(-2\lambda^3(1-\lambda^3x)\left(1-\frac{\lambda^2}{2}x\right)^3+\frac32\lambda^2(1-\lambda^3x)^2\left(1-\frac{\lambda^2}{2}\,x\right)^2\right)=\\&=\frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{1-\lambda^3x}{\left(1-\dfrac{\lambda^2}{2}\,x\right)^4}\left(-4\lambda\left(1-\frac{\lambda^2}{2}x\right)+3(1-\lambda^3x)\right),\end{aligned}$$

és itt mind a három tényező pozitív a $[0;4]$ intervallumban; a nagy zárójel:

$$3-4\lambda-\lambda^3x \geqq 1-\frac{x}{8}>0.$$

Evvel bebizonyítottuk állításunkat.

Az is belátható, hogy rögzített n esetén κ_n értéke növekszik, ha λ értéké a megadott határokon belül nő, a feladat kérdése azonban nem erre vonatkozott.

Megjegyzés. Emlékeztetjük az olvasót a konvex *síkidomok* izoperimetrikus hányadosára, t/p^2-re (F. 2395. feladat, KöMaL 1983. szept. szám, 11. oldal). Itt a konvex *testek* ugyanilyenféle jellemző számáról van szó. Ott t^1 és p^2 kitevője – fölcserélve – abból adódik, hogy a terület 2 dimenziós méret, a kerület (hosszúság) 1 dimenziós. Itt pedig F és V dimenziószáma 2, ill. 3. Ezekből t/p^2 és V^2/F^3 dimenziója egyaránt 0, ami azt jelenti, hogy a hányados nem függ az egységek megválasztásától, ha V és F egységét ugyanabból a hosszegységből származtatjuk.

Konvex síkidomokra t/p^2 legnagyobb értéke $1/4\pi$, a körre; a konvex testeknél pedig κ a gömbre a legnagyobb: $1/36\pi$. Ez az ún. *izoperimetrikus probléma.* (Kockára $1/216$, négyzetre $t/p^2=1/16$.)

Eredményünket szemléletesen így fejezhetjük ki: az egymás után 1, 2, 3, 4 tetraéder levágásával kapott testek lépésről lépésre haladnak a „gömbszerűség” felé. $\lambda=1/2$ esetén a negyedik levágás eredménye szabályos oktaéder.