Jelöljük a háromszög csúcsait A, B, C betűvel, az A-tól B felé haladva átlépett osztópontokat sorra $C_1, C_2, \ldots, C_{11}$-gyel, és B-től C-ig, majd tovább A-ig hasonlóan $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$, $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$-gyel. Az AA_6, BB_6, CC_6 összekötő szakaszok a háromszög szimmetriatengelyei, közös pontjuk a háromszög O középpontja.

1984-01-012-1.eps

A tengelyeken levő minden metszésponton hasonlóan 2 másik összekötés megy át, pl. AA_6 és BB_i közös pontján CC_{12-i} is $(i = 1, 2, \ldots, 11)$, hiszen B_i és C_{12-i} nyilván tükrös pontpár az AA_6 tengelyre nézve. Ezek a metszéspontok tehát akkor is létrejönnének, ha az AA_6, BB_6, CC_6 tengelyeket nem rajzolnánk be vagy pedig ha töröljük őket.

Valóban, az $i = 6$-hoz tartozó összekötéseket tovább ott nem levőknek tekintjük, csak O címén majd 1-et hozzáadunk a megállapítandó létszámhoz. Így a háromszög mindegyik csúcsából 10 összekötés indul ki – nevezzük ezeket röviden *ferdé*knek – , és mindegyik metszi a további csúcsokból induló $10+10$ ferde összekötést, mert pl. a BB_i szakasz elválasztja A-t minden A_i-től és C-t minden C_i-től. E pillanatban tehát $30 \cdot 20/2 = 300$ metszéspontra gondolunk, hacsak nincs olyan pont, amelyen három ferde megy át.

Megmutatjuk, hogy nincs további hármas metszéspont. Jelöljük BB_i és CC_j metszéspontját P-vel – ami belső pontja a háromszögnek – , az AP egyenesnek a BC oldalszakaszon levő pontját Q-val, ekkor állításunk szerint Q nem tartozik az A_K osztópontok közé. Természetesen $i \neq 6$ és $j \neq 6$, sőt $j \neq 12 - i$, különben $Q = A_6$ következnék be.

Tekintsük a BPA és BPC háromszögek területének arányát. Közös alapjuk BP, tehát az arányt megadja az erre merőleges magasságok aránya, ezt pedig az AB_i és CB_i, oldalaik aránya. Hosszúságegységnek AC_1-et választva

$$\frac{t_{BPA}}{t_{BPC}} = \frac{AB_i}{B_iC} = \frac{12-i}{i} \quad (i \neq 6).$$

Ugyanígy

$$\frac{t_{CPB}}{t_{CPA}} = \frac{BC_j}{C_jA} = \frac{12-j}{j} \quad (j \neq 6,\ j \neq 12-i),$$

és e kettő szorzatából, egyszerűsítés útján

$$\frac{t_{APB}}{t_{APC}} = \frac{AB_i \cdot BC_j}{B_iC \cdot C_jA} = \frac{(12-i)(12-j)}{ij}.$$

A bal oldalt önállóan is kifejezhetjük az előbbiek mintájára:

$$\frac{t_{APB}}{t_{APC}} = \frac{t_{AQB}}{t_{AQC}} = \frac{BQ}{QC},$$

ugyanis a második arányban szereplő háromszögek rendre úgy jöttek létre az elsőben szereplőkből, hogy a közös AP alapot AQ/AP arányban növeltük, a harmadik csúcsokat pedig változatlanul hagytuk, tehát a magasságok nem változtak meg. Ezek alapján

$$\frac{AB_i \cdot BC_j}{B_iC \cdot C_jA} = \frac{BQ}{QC},$$

másképpen

$$\frac{AB_i \cdot BC_j \cdot CQ}{B_iC \cdot C_jB \cdot QB} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{12-i}{i} \cdot \frac{12-j}{j} \cdot \frac{12-q}{q} = 1, \tag{2}$$

ahol $q = BQ$, amelyre $0 < q < 12$ és nyilván $q \neq 6$. Azt akarjuk belátni, hogy q nem egész szám.

Föltesszük, hogy q mégis egész, és belátjuk, hogy így (2) nem teljesülhet. Mindenesetre az előbbiekhez hasonlóan $12 - q \neq i$ – különben Q a B_i tükörképe volna CC_6-ra, vagyis a kizárt $j = 6$ esettel állnánk szemben –, hasonlóan $12 - q \neq j$, és megfordítva $q \neq 12 - i$ és $q \neq 12 - j$. Ezek szerint (2) bal oldalán hat különböző egész szám szerepel az 1-től 11-ig terjedők közül, kihagyva a 6-ost. A jobb oldalon álló 1 értékhez egyszerűsítés útján kellene eljutnunk.

Nem léphet föl ugyanis a hat különböző szám között a 11 és a 7, mert prímek, így csak akkor egyszerűsíthetnénk, ha a számlálóban és a nevezőben szerepelnének. Így nem léphet föl a 12-re kiegészítőjük, az 1 és az 5 sem. A maradó hat számból két *egyenlő* szorzatot kellene képeznünk, tehát a számláló és a nevező szorzatának négyzetszámnak kellene lennie. Ámde a hat szám szorzata nem négyzetszám, az 5-ös prímtényező csak a 10-ben lép fel.

Ezzel bebizonyítottuk állításunkat, q nem egész szám, Q nincs közte az A_i, osztópontoknak. Nem keletkezik további hármas metszéspont az összekötések által, végül a metszéspontok létszáma $1 + 300 = 301$.

Megjegyzések. 1. A közben talált (1) összefüggés levezetésében még nem használtuk fel, hogy i, j egészek, ezért általános érvényű összefüggés a hat szakasz között, amelyet a háromszögbeli P-n átmenő AQ, BB_i és CC_j összekötések (transzverzálisok = átmenők) között *Ceva*-féle tétel néven sokan ismernek, $322 \cdot 4$ jelzőszám alatt az Iskolai Függvénytáblázatok függelékében is megtalálható. Azért vezettük le mégis, mert az iskolai tananyagban nem szerepel, mert gyakorlati alkalmazására nem lenne idő. A tétel akkor is érvényes, ha P kívül van a háromszögön, és értéke $+1$, ha az A, C_j, B, Q, C, B_i, A körüljárásban a visszafelé való mozgások szakaszait negatívnak vesszük.

2. Ha 12 helyett 15 egyenlő részre osztjuk az oldalakat, egyrészt elmaradnak a tengelybeli hármas metszéspontok, másrészt mégis kapunk ilyeneket: jelölési elvünket tovább fejlesztve AA_5, BB_5 és CC_{12} egy ponton mennek át, mert

$$\frac{10}{5}\cdot\frac{10}{5}\cdot\frac{3}{12}=2\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=1.$$

Be lehet ugyanis bizonyítani a Ceva-tétel megfordítottját is. A részben egyszerűsített alakból látható, hogy a hármas metszés a $15=3\cdot 5=(2+1)(1+4)$ előállítás következménye.

3. Ha valaki a $3\cdot 11=33$ transzverzális lehető pontos megrajzolása útján próbál tájékozódni, az AA_8, BB_5 és CC_5 összeköttetésekből elég kis háromszöget kap, kételkedhet is, hogy nem hibás-e a rajza. Az F. 1437. feladatban (KöMaL. 33. kötet, 206. oldal, 1966) kiszámítottuk, hogy a kis háromszög területe az ABC területének 74 338-ad része, vagyis lineárisan mintegy 270-szeresen kisebb háromszöget zár körül a három összekötés (nem szabályos háromszög).