Vezessünk be $x+y$, $z+u$, valamint $xy=zu$ jelölésére új változókat, mondjuk $x+y=a$, $z+u=b$ és $xy=zu=c$. Az (1) – (3) egyenleteket az

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

azonosságok felhasználásával a következő alakba írhatjuk át:

$$a+b=12, \tag{1'}$$
$$a^2+b^2-4c=170, \tag{2'}$$
$$a^3+b^3-3ac-3bc=1764. \tag{3'}$$

Szintén a fenti azonosságokat használva (1') alapján

$$a^2+b^2=144-2ab,$$
$$a^3+b^3=1728-3ab\cdot 12.$$

Ezeket (2')-be, ill. (3')-be téve és mindjárt átrendezve

$$ab+2c=-13,$$
$$ab+c=-1,$$

ahonnan $ab=11$ és $c=-12$. Ha most x, y, z és u olyan számok, hogy $xy=zu$, továbbá a fent definiált a, b, c mennyiségekre $a+b=12$, $ab=11$ és $c=-12$, akkor az (1) – (4) egyenletek teljesülni fognak.

Az $a+b=12$ és $ab=11$ alapján a és b lehetséges értékei

$$a_1=11 \quad \text{és} \quad b_1=1, \quad \text{ill.} \quad a_2=1 \quad \text{és} \quad b_2=11.$$

Ezeket az $x+y=a$, $xy=-12$, valamint $z+u=b$, $zu=-12$ összefüggésekkel összevetve, x-re, y-ra, z-re és u-ra a következő nyolc lehetőség adódik:

x	12	12	–1	–1	4	4	–3	–3
y	–1	–1	12	12	–3	–3	4	4
z	4	–3	4	–3	12	–1	12	–1
u	–3	4	–3	4	–1	12	–1	12

1984-03-139-1.eps

Előbbi megjegyzésünk értelmében ezek mindegyike megoldás, és csak ezek a megoldások. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. Néhányan feltételezték, hogy a gyökök egészek, és ezek után részben próbálgatással, részben „okoskodással" jutottak a fenti megoldásokhoz. Mivel ez nem szerepelt a feltételek között, így ezek a dolgozatok hibásnak minősültek.