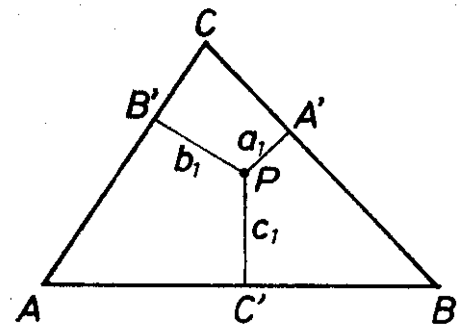
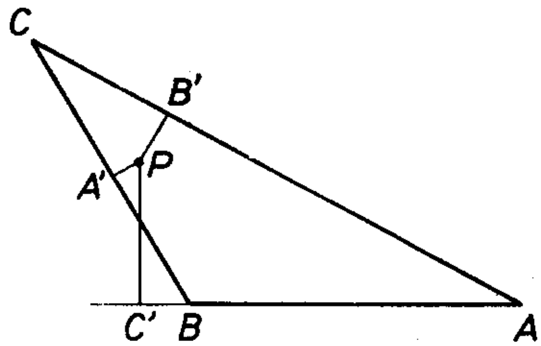
Legyen $PA' = a_1,\ PB' = b_1,\ PC' = c_1$ és $\dfrac{a}{a_1} + \dfrac{b}{b_1} + \dfrac{c}{c_1} = S$. A háromszög területe: $T = \dfrac{1}{2}(aa_1 + bb_1 + cc_1)$.





Számoljuk ki a $2TS$ szorzat értékét:

$$\left(\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} + \frac{c}{c_1}\right) \cdot (aa_1 + bb_1 + cc_1) = a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_1}{a_1}\right) + ac\left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{c_1}{a_1}\right) + bc\left(\frac{b_1}{c_1} + \frac{c_1}{b_1}\right).$$

Alkalmazzuk az $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqq 2$ egyenlőtlenséget $(x, y > 0)$, egyenlőség csak $x = y$ esetén teljesül:

$$2TS \geqq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = (a + b + c)^2 = K^2.$$

A jobb oldal állandó: a kerület négyzete. Így $S \geqq \dfrac{K^2}{2T}$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = b_1 = c_1$. Az S kifejezés értéke tehát akkor a legkisebb, ha P egyenlő távol van mindhárom oldaltól - azaz ha P egybeesik a beírt kör középpontjával.

Bán Rita (Szeged, Radnóti M. Gimn., II. o. t.)