(1) $$\left[\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\ldots+\sqrt{k+p}\right)^2\right]=\frac{1}{2}(p+1)^2(2k+p)-1.$$

Megoldás. Először is jegyezzük meg, hogy (1) jobb oldalán egész szám áll, hiszen vagy $p+1$ vagy $2k+p$ mindenképpen páros. Egyenlőségünk tehát a következő egyenlőtlenség–párral ekvivalens:

(2) $$\frac{1}{2}(p+1)^2(2k+p)-1\le\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\ldots+\sqrt{k+p}\right)^2<\frac{1}{2}(p+1)^2(2k+p).$$

Tekintsük először (2) jobb oldali egyenlőtlenségét. Gyököt vonva és $(p+1)$-gyel osztva a

$$\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\ldots+\sqrt{k+p}}{p+1}<\sqrt{\frac{2k+p}{2}}$$

összefüggésre jutunk, ami a $\sqrt{k}$, $\sqrt{k+1}$, …, $\sqrt{k+p}$ számok számtani és négyzetes közepe közti egyenlőtlenség alapján mindig teljesül. ($p\ge 1$ miatt a számok különbözők és így egyenlőség nem állhat fenn.)

Foglalkozzunk most (2) bal oldali egyenlőtlenségével. Először megmutatjuk, hogy minden $0\le i\le p$-re

$$\sqrt{k}+\sqrt{k+p}\le\sqrt{k+i}+\sqrt{k+p-i}.$$

Valóban, négyzetre emelve és rendezve

$$\sqrt{k+(k+p)}\le\sqrt{(k+i)+(k+p-i)}=\sqrt{k(k+p)+i(p-i)}$$

ami $i(p-i)\ge 0$ miatt teljesül. Ennek alapján

(3) $$\left(\frac{p+1}{2}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+p}\right)\right)^2<\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}+\ldots+\sqrt{k+p}\right)^2.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy létezik olyan k_0, hogy minden $k>k_0$-ra

(4) $$\frac{1}{2}\,(p+1)^2(2k+p)-1\le\left(\frac{p+1}{2}\sqrt{k}+\sqrt{k+p}\right)^2.$$

Ebből (3) alapján (2) bal oldali egyenlőtlensége azonnal adódik. (4) mindkét oldalát $(p+1)^2/2$-vel osztva, a négyzetre emelést elvégezve és rendezve

$$\frac{2}{(p+1)^2}\ge k+\frac{p}{2}-\sqrt{k(k+p)}=\frac{1}{4}\,\frac{p^2}{k+\frac{p}{2}+\sqrt{k(k+p)}}.$$

Ez elég nagy k-ra teljesül, hiszen a jobb oldal k növekedésével 0-hoz tart.

Így a feladat állítását igazoltuk.