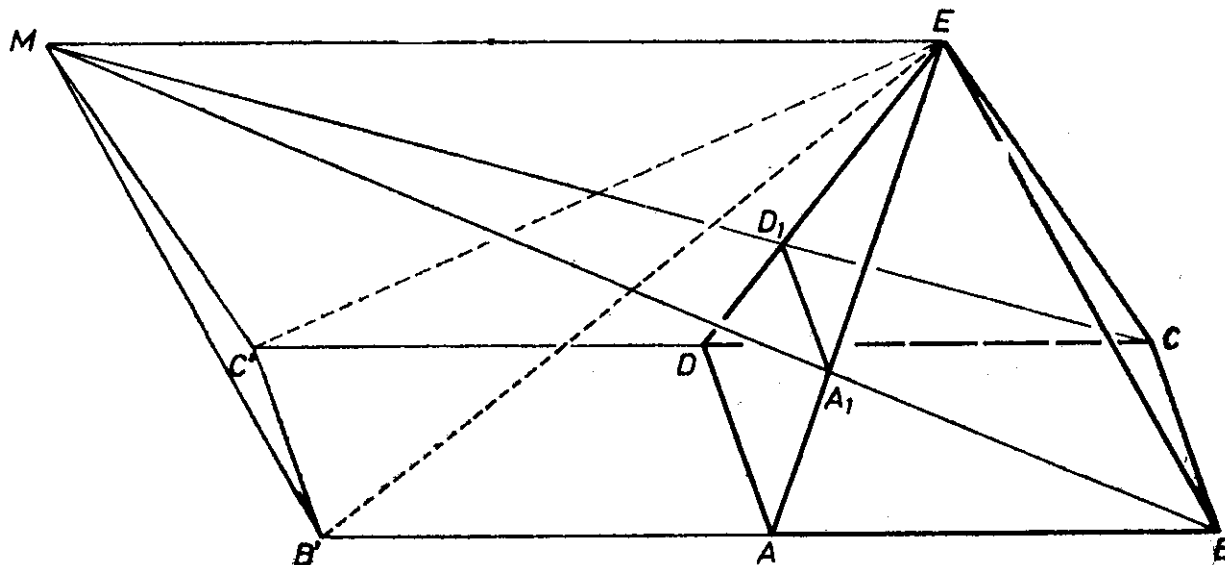


Húzzuk meg az  $E$  ponton keresztül az  $AB$ -vel párhuzamos egyenest, legyen ez  $e$ ; ekkor persze  $e$  a  $CD$ -vel is párhuzamos. Az  $e$  egyenes tehát benne van az  $ABE$  és  $CDE$  síkokban is, vagyis éppen ezek metszésvonala  $BA_1$  az  $ABE$  síkban,  $CD_1$  a  $CDE$  síkban fekszik, tehát ezek  $M$  metszéspontja az  $ABE$  és  $CDE$  síkok metszésvonalán van, vagyis az  $e$  egyenes éppen az  $EM$  egyenese. Ezek szerint  $EM \parallel AB$ .



Jelöljük  $B'$ -vel a  $B$  pont  $A$ -ra vonatkozó tükörcépét,  $C'$ -vel pedig a  $C$  pont  $D$ -re vonatkozó tükörcépét. Ekkor  $B'B = C'C = 2AB = EM$ , tehát a  $B'C'M$  és a  $BCE$  síkok párhuzamosak. Ebből következik, hogy az  $MBCE$  és a  $B'BCE$  tetraéderek térfogata megegyezik:

$$(1) \quad V_{MBCE} = V_{B'BCE}.$$

Látszik, hogy a  $B'BC$  háromszög és az  $ABCD$  téglalap területe egyenlő, tehát a  $B'BCE$  tetraéder és az  $ABCDE$  gúla térfogata megegyezik:

$$(2) \quad V_{B'BCE} = V_{ABCDE} = 1.$$

Az  $ABA_1$  és  $EMA_1$  háromszögek hasonlóak, mert a megfelelő oldalak párhuzamosak vagy egybeesnek. Ebből következik, hogy  $A_1M = 2A_1B$  (mivel  $EM = 2AB$  a feladat szerint), vagyis  $A_1M = \frac{2}{3}MB$ . Ugyanígy kapjuk, hogy  $MD_1 = \frac{2}{3}MC$ . Ezek szerint az  $MA_1D_1$  és az  $MBC$  háromszögek hasonlóak,  $MA_1D_1$ -et az  $MBC$  háromszög  $M$  centrumból történő  $\frac{2}{3}$  arányú kicsinyítésével kapjuk. A területek aránya a lineáris méretek arányának négyzete:

$$T_{MA_1D_1} = \frac{4}{9} T_{MBC}.$$

Ebből rögtön adódik, hogy az  $EMA_1D_1$  tetraéder térfogata az  $EMBC$  tetraéder térfogatának  $\frac{4}{9}$ -e:

$$(3) \quad V_{EMA_1D_1} = \frac{4}{9} V_{EMBC}.$$

Az (1), (2) és (3) egyenleteket összevetve azt találjuk, hogy az  $EMA_1D_1$  tetraéder térfogata  $\frac{4}{9}$  térfogategység.

*Réz András* (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

*Megjegyzés* Nem használtuk ki, hogy az  $ABCD$  négyszög derékszögű, csak azt, hogy paralelogramma, sőt még azt sem, hogy  $EA = EC$  és  $EB = ED$  volna.