Az egységnyi sugarú kör kerületén már egy-egy csúcspont kijelölése is teljesen megszabja a kívánt szabályos hat-, ill. hétszöget. A konvex burok alakját pedig, mivel azt csak a szabályos sokszögek relatív helyzete befolyásolja, egyetlen szögparaméter meghatározza. A paraméter szerencsés megválasztása megkönnyítheti a szükséges számításokat.

Kiinduló helyzetnek tekintsük azt, amelyben a szabályos sokszögeknek van közös szimmetria-tengelyük, de nincs közös csúcspontjuk (lásd ábra; a szabályos hatszög csúcsait teli, a szabályos hétszögét üres karikák jelölik). A konvex burok most egy tengelyesen szimmetrikus 13 oldalú sokszög, melynek csúcspontjait a szabályos sokszögek csúcspontjai alkotják.

1984-10-298-1.eps

Ennek a 13-szögnek a középponti szögeit vizsgáljuk. A szabályos hatszög csúcsai a szabályos hétszög különböző középponti szögtartományaiba esnek, mivel $\frac{2\pi}{6}>\frac{2\pi}{7}$. A szabályos hétszögnek tehát *pontosan egy* középponti szögtartománya van, amelybe nem esik hatszög-csúcs. Ez a $\frac{2\pi}{7}$ nagyságú szögtartomány ezért szükségképpen szimmetrikus a konvex burok szimmetriatengelyére. A vele szomszédos középponti szögek a 13-szögben a szimmetria miatt egyenlők, mégpedig $\frac{\pi}{42}$ nagyságúak, mivel összegük $\frac{2\pi}{6}-\frac{2\pi}{7}$. Most mindkét forgásirányban tovább haladva felváltva következnek hatszög, ill. hétszög-csúcsra illeszkedő szögszárak.

Nevezzük a középponti szögek irányának annak a 180°-osnál kisebb elforgatásnak az irányát, amely a szög hétszög-csúcsra illeszkedő szárát (kezdő szár) a hatszög-csúcsra illeszkedő szárába viszi át.

A $\frac{2\pi}{7}$ nagyságú szög kivételével minden középponti szögnek van egy szimmetrikus párja, amely éppen ezért vele egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú. Ha a $\frac{\pi}{42}$ nagyságú szögekből kiindulva, a szög irányába haladva, a kiindulásul vett szöggel azonos irányú szögeket sorra vesszük, minden szög az előzőnél $\frac{2\pi}{42}$-vel nagyobb, hiszen egy szöget az előzőből úgy is megkaphatunk, hogy ennek kezdő szárát $\frac{2\pi}{7}$ -tel, másik szárát $\frac{2\pi}{6}$ -tal a szög irányába elforgatjuk.

A kiinduló helyzetben tehát a konvex buroknak van egy $\frac{2\pi}{7}$ nagyságú középponti szöge, továbbá két-két $\frac{\pi}{42}$, $\frac{3\pi}{42}$, $\frac{5\pi}{42}$, $\frac{7\pi}{42}$, $\frac{9\pi}{42}$, $\frac{11\pi}{42}$ nagyságú középponti szöge.

Rögzítsük a szabályos hatszöget, és forgassuk el a középpont körül a szabályos hétszöget pozitív irányban, az elforgatás szöge legyen $2x$. Célunk az, hogy a konvex burok az összes lehetséges alakját felvegye. Azt állítjuk, hogy ehhez elegendő, ha $2x$ értéke 0 és $\frac{\pi}{42}$ között változik. Valóban, $2x=\frac{2\pi}{42}$ esetén újra a kiinduló helyzettel azonos helyzet áll elő. A $\frac{\pi}{42}<2x<\frac{2\pi}{42}$ esetekben pedig csak a tükörképeit kapjuk azoknak a konvex burkoknak, amelyek a $0<2x<\frac{\pi}{42}$ esetekben létrejöttek. A tükörtengely az a közös szimmetria-tengely, amellyel $2x=\frac{\pi}{42}$ esetén a szabályos sokszögek rendelkeznek. (Ebben az esetben van közös csúcs is, tehát a konvex burok 12 oldalú sokszög.)

Írjuk föl a konvex burok kerületét x függvényében! Az elforgatás következtében a negatív irányú középponti szögek $2x$-szel nőnek, a pozitív irányúak $2x$-szel csökkennek, a $2\pi/7$ nagyságú középponti szög nem változik. Így a következő 13 (esetleg 12, ha $2x=\pi/42$) középponti szögünk van:

$$\frac{2\pi}{7},\ \frac{\pi}{42}-2x,\ \frac{\pi}{42}+2x,\ \frac{3\pi}{42}-2x,\ \frac{3\pi}{42}+2x,\ \frac{5\pi}{42}-2x,\ \frac{5\pi}{42}+2x,\ \frac{7\pi}{42}-2x,\ \frac{7\pi}{42}+2x,$$
$$\frac{9\pi}{42}-2x,\ \frac{9\pi}{42}+2x,\ \frac{11\pi}{42}-2x,\ \frac{11\pi}{42}+2x,$$

Az egységnyi sugarú körben az α középponti szöghöz tartozó húr hossza $2\sin\frac{\alpha}{2}$, tehát a konvex sokszög $k(x)$ kerülete

$$k(x)=2\sin\frac{\pi}{7}+2\cdot\sum_{i=1}^{6}\left(\sin\left(\frac{2i-1}{84}\pi-x\right)+\sin\left(\frac{2i-1}{84}\pi+x\right)\right).$$

A $\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha-x)=2\,\sin\alpha\,\cos x$ azonosság alapján

$$k(x)=2\sin\frac{\pi}{7}+2\cdot\sum_{i=1}^{6}\left(2\sin\frac{(2i-1)\pi}{84}\cdot\cos\ x\right)=A+B\cos\ x, \tag{1}$$

$$\text{ahol } A=2\sin\frac{\pi}{7}=0{,}868,\ \text{ és } B=4\cdot\sum_{i=1}^{6}\sin\frac{(2i-1)\pi}{84}=5{,}297.$$

Mivel $\cos\ x$ a kérdéses $0\leqq x\leqq\pi/84$ intervallumon szigorúan fogy, azért

$$A+B\geqq k(x)\geqq A+B\cos\frac{\pi}{84},$$

és egyenlőség csak az $x=0$, illetve $x=\pi/84$ esetekben áll fönn. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés. Az (1)-ben szereplő B-vel jelölt kifejezést zárt alakban is felírhatjuk a következő azonosság alapján:

$$\sin t+\sin 2t+\cdots+\sin nt=\frac{\sin\dfrac{(n+1)t}{2}\sin\dfrac{nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}.$$

Ekkor ugyanis

$$\sum_{i=1}^{6}\sin\frac{(2i-1)\pi}{84}=\sum_{i=1}^{11}\sin\frac{i\pi}{84}-\sum_{i=1}^{5}\sin\frac{2i\pi}{84}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{14}\cdot\sin\dfrac{11\pi}{168}}{\sin\dfrac{\pi}{168}}-\frac{\sin\dfrac{\pi}{14}\sin\dfrac{5\pi}{84}}{\sin\dfrac{\pi}{84}}=$$
$$=\frac{\sin\pi/14}{\sin\pi/84}\left(2\sin\frac{11\pi}{168}\cos\frac{\pi}{168}-\sin\frac{5\pi}{84}\right)=\frac{\sin^2\pi/14}{\sin\pi/84}.$$

A legutolsó lépésben a zárójel első tagjára a következő azonosságot alkalmaztuk:

$$2\sin u\cos v=\sin(u+v)+\sin(u-v).$$

Ezek alapján

$$k(x)=2\sin\frac{\pi}{7}+4\frac{\sin^2\pi/14}{\sin\pi/84}\cos x.$$

Innen $k(x)$ értéke zsebkalkulátorral pontosabban számolható:

$$k\left(\frac{\pi}{84}\right)=6{,}161\ 0929,\quad \text{és}\quad k(0)=6{,}164\ 7971,$$

a konvex burok kerülete mindig e két határ között van.