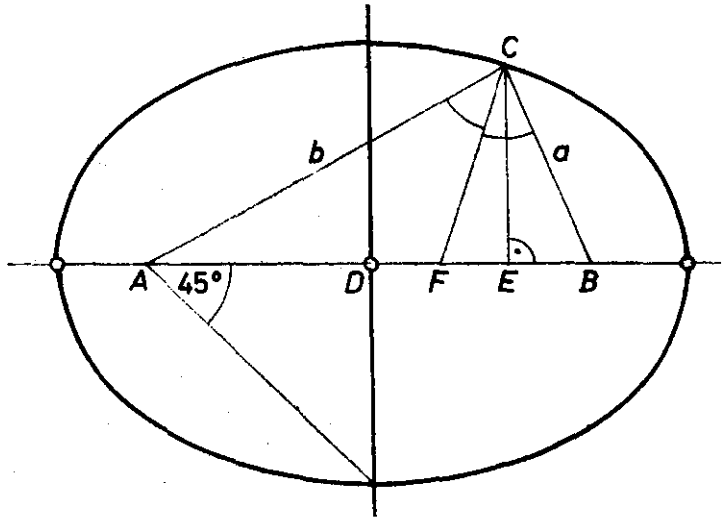
Legyen a C-ből induló belső szögfelező és AB metszéspontja F.



Ekkor a szokásos jelölésekkel $AF + FB = c$, és a szögfelezőre vonatkozó ismert tétel alapján:

$$AF : FB = AC : CB = b : a.$$

Ezekből $AF = c \cdot b/(a+b)$.

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $a \le b$, így $DF = AF - \dfrac{c}{2} = c\dfrac{b-a}{2(a+b)}$. A cosinustétel alapján: $\cos\ ABC\sphericalangle = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, ezért $DE = \dfrac{c}{2} - a \cdot \cos\ ABC\sphericalangle = \dfrac{b^2-a^2}{2c}$.

Azon C pontok mértani helyét keressük, melyekre

$$\frac{DE}{2} = DF,$$

vagyis

$$\frac{b^2-a^2}{4c} = c\frac{b-a}{2a+b},$$

Átrendezve:

$$(b-a)\left[(2a+b)^2 - 2c^2\right] = 0.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha vagy $a = b$, vagy $a + b = \sqrt{2}c$.

Az első esetben a háromszög egyenlő szárú, D és E egybeesik. A mértani hely az AB szakasz felező merőlegese, kivéve a D pontot, hiszen ha C az AB egyenesre esik, nincs háromszög, nincs szögfelező.

A második egyenlet az $a \le b$ feltétellel együtt $\sqrt{2}c$ nagytengelyű, A, B fókuszú ellipszisnek B-hez közelebbi felét adja.

Megengedve az $a > b$ esetet is, ugyanehhez az összefüggéshez jutunk, és megkapjuk az ellipszis másik ívét.

A gondolatmenetet megfordítva belátható, hogy az ellipszis minden pontja, az AB-vel közös két pontját kivéve, hozzátartozik a mértani helyhez.

Simon Péter (Bp., József Attila Gimn., III. o. t.)