Elsőként belátjuk, hogy az a, b, c számok egyértelműen meg vannak határozva, majd ezután vizsgáljuk egymáshoz való viszonyukat. Tekintsük a

$$p(x)=x,\qquad q(x)=\cos x,\qquad r(x)=\sin\cos x,\qquad s(x)=\cos\sin x$$

függvényeket a [0, 1] intervallumban. Azért itt, mivel a feladat szerint a, b, c pozitív, és minden x-re $q(x)\le 1$, $r(x)\le 1$, $s(x)\le 1$, tehát a, b, c csak a [0, 1] intervallumban lehet. A [0, 1]-ben $p(x)$ szigorúan monoton nő, a másik három függvény szigorúan monoton csökken. 0-ban $p(x)$ kisebb értéket vesz fel, mint a másik három függvény, 1-ben pedig nagyobb értéket, így a függvények folytonossága miatt $p(x)$ grafikonjának pontosan egy–egy metszéspontja van a $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ függvények grafikonjával. Ezzel a, b, c létezését és egyértelműségét bizonyítottuk.

Pozitív x-ekre $\sin x<x$, így

$$r(a)=\sin\cos a=\sin a<a=p(a).$$

Ez azt jelenti, hogy $p(x)$ és $r(x)$ grafikonja a-tól balra metszi egymást, vagyis hogy $b<a$. Mivel [0, 1]-ben a $\cos x$ függvény monoton csökken, és $\sin a<a$, azért

$$s(a)=\cos sin\, a>\cos a=a=p(a).$$

Így $p(x)$ és $s(x)$ grafikonja a-tól jobbra metszi egymást: $a<c$. Tehát a három szám sorrendje $b<a<c$.

Kisdi Bálint (Bp., Piarista Gimn., III. o. t.)