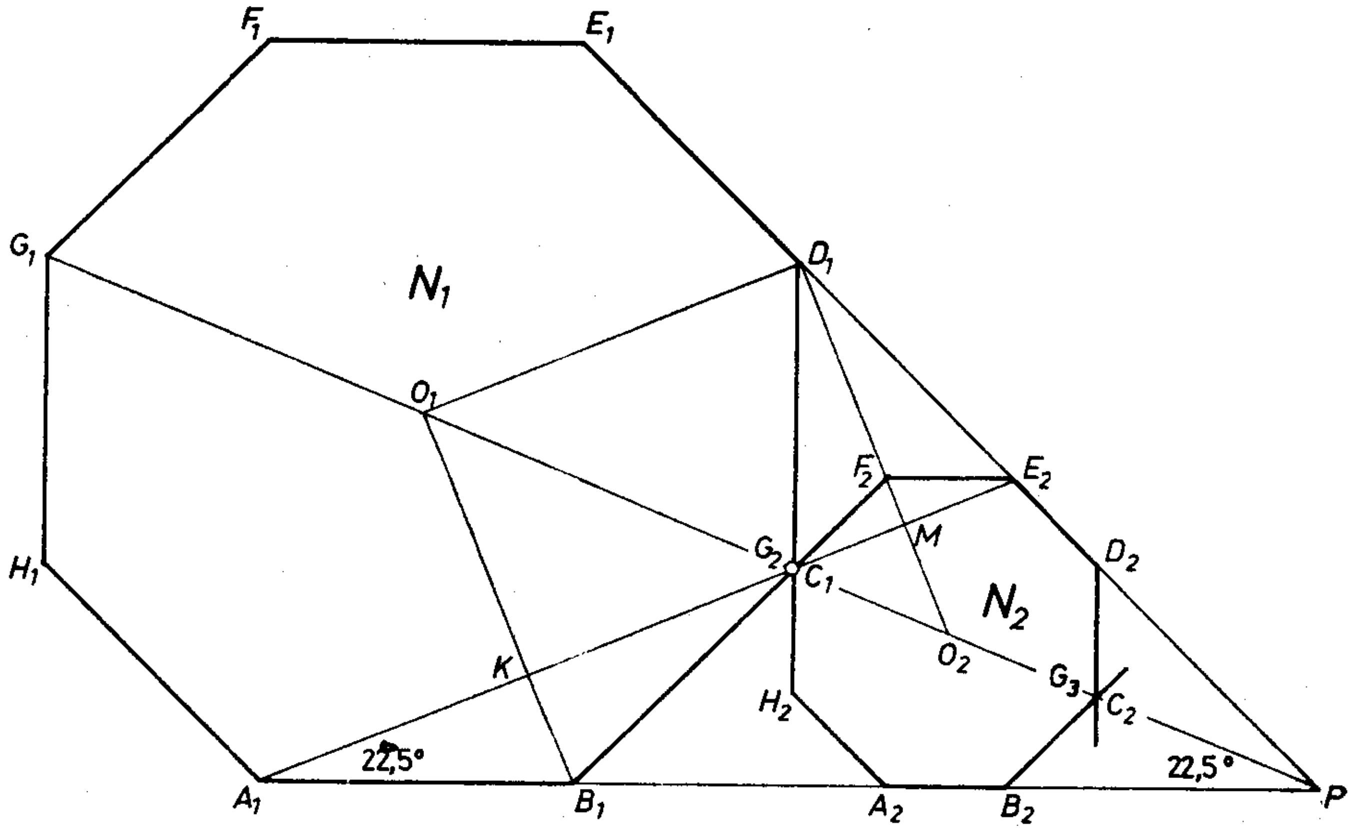
Legyen az A_1B_1 és D_1E_1 egyenesek metszéspontja P. N_1 és N_2 hasonlóak, továbbá hasonló helyzetűek is P-re mint centrumra nézve, mert az A_1A_2, a B_1B_2 és a D_1D_2 egyenesek közös pontja P. Az N_i-k szabályossága folytán $B_1PD_1\sphericalangle = 45°$, és $D_1P = B_1P < A_1P$, tehát a C_1 csúcs a hegyesszögű, egyenlő szárú B_1PD_1 háromszög magasságpontja, és rajta van e háromszög szimmetriatengelyén. Ez egyben N_1-nek is tengelye, ezért átmegy a G_1 csúcson. Így a $G_2 = C_1$ feltétel egyértelműen meghatározza az N_2 nyolcszög helyzetét, az $A_2B_2 < A_1B_1$ feltételt nem is szükséges kikötni.



Az N_1, N_2, ... nyolcszögek rendszere szimmetrikus a G_1P egyenesre; így ezen az egyenesen helyezkednek el a G_i, O_i, C_i pontok ($i = 1,\ 2,\ \ldots$). $r_i = O_iC_i = O_iG_i$, tehát $G_iC_i = G_iG_{i+1} = 2r_i$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots$). Látható, hogy a G_i, pontok i növekedtével minden határon túl megközelítik a P pontot, vagyis megállapíthatjuk, hogy a kétszeres sugarak összege tart a G_1P szakasz hosszához:

$$2\sum_{i=1}^{\infty} r_i = G_1P. \tag{1}$$

Az A_1C_1P háromszög egyenlő szárú, mert A_1-nél és P-nél levő szöge megegyezik (22,5°). Eszerint $A_1C_1 = C_1P$. Legyen K az A_1C_1 és O_1B_1 szakasz metszéspontja; nyilván K felezi az A_1C_1 szakaszt, tehát

$$C_1P = 2A_1K. \tag{2}$$

Az M-et meghatározó D_1O_2 egyenes szimmetriatengelye az N_2-nek, mivel D_1 a D_2E_2 és H_2G_2 egyenesek metszéspontja, tehát D_1O_2 az $E_1D_1C_1$ szögnek külső szögfelezője. Ugyanennek a szögnek D_1O_1 a belső szögfelezője, tehát $D_1O_1 \perp D_1O_2$.

Az nyilvánvaló, hogy $D_1O_1 \perp O_1K$, és $O_1K \perp A_1C_1$; ezekből az következik, hogy az O_1KMD_1 négyszög téglalap, tehát $KM = O_1D_1 = r_1$.

Mindezek alapján

$$A_1M = A_1K + KM = \frac{A_1C_1}{2} + \frac{H_1D_1}{2} = \frac{PC_1}{2} + \frac{C_1G_1}{2} = \frac{PG_1}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} r_i,$$

ezt kellett bizonyítanunk.

Beke Sándor (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján